6

Sistemas de ecuaciones lineales

6.1. Sistemas de ecuaciones lineales

Se llama ***ecuación lineal en*** n ***incógnitas sobre*** $\mathbb{R}$ a una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

con los a_i en $\mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq n$ y b en $\mathbb{R}$. A los a_i se les denomina ***coeficientes***, a b se le denomina ***término independiente*** y a $x_1, \ldots, x_n$ se les denomina ***incógnitas*** de la ecuación.

Un ***sistema de*** m ***ecuaciones lineales con*** n ***incógnitas sobre*** $\mathbb{R}$ es un sistema de la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \text{ con } \begin{array}{c} a_{ij}, b_i \text{ en } \mathbb{R} \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{array}$$

Si todos los b_i son nulos, se dice que el sistema es ***un sistema homogéneo***.

Dado un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas sobre $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

se llama ***solución*** del sistema a toda n-upla $(r_1, \ldots, r_n)$ de números reales que satisface todas las ecuaciones del sistema; es decir, tal que

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}r_1 + a_{12}r_2 + \cdots + a_{1n}r_n & = & b_1 \\ a_{21}r_1 + a_{22}r_2 + \cdots + a_{2n}r_n & = & b_2 \\ \cdots & & \\ a_{m1}r_1 + a_{m2}r_2 + \cdots + a_{mn}r_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

Compatibilidad de sistemas

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es ***compatible*** si tiene alguna solución; si tiene una única solución se dice que es un sistema ***compatible determinado***, si tiene más de una solución se dice que es ***compatible indeterminado***. Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es ***incompatible*** si no tiene solución.

Todo sistema homogéneo es compatible, $(0, 0, \cdots, 0)$ es solución del sistema.

Discutir un sistema de ecuaciones lineales consiste en determinar su compatibilidad.

Resolver un sistema consiste en encontrar las soluciones de dicho sistema.

6.2. El método de Gauss

Sistemas y matrices

Si m y n son dos números naturales, una ***matriz*** A de tamaño $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ es una disposición rectangular en m filas y n columnas de $m \cdot n$ números reales.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Al escalar a_{ij}, que está en la fila i y la columna j, se le llama ***entrada*** (i, j) de la matriz A. A esta matriz la representaremos abreviadamente como $A = (a_{ij})$.

Al conjunto formado por todas las matrices $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$ se le denota por $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Se dice que una matriz A es ***cuadrada*** si tiene el mismo número de filas que de columnas. Al conjunto formado por todas las matrices cuadradas $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ se le denota por $M_n(\mathbb{R})$.

Toda la información del sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\}$$

puede resumirse en la matriz $m \times (n + 1)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

La matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ en } M_{m,n}(\mathbb{R})$$

se denomina ***matriz de coeficientes*** del sistema, la matriz columna

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ en } M_{m,1}(\mathbb{R})$$

se denomina ***matriz de términos independientes***, a la matriz completa $(A|B)$ se le denomina ***matriz ampliada*** del sistema.

Dos sistemas de m ecuaciones lineales con n incógnitas sobre $\mathbb{R}$ se dice que son ***equivalentes*** si tienen las mismas soluciones.

Un método general para discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales , denominado ***método de eliminación de Gauss***, consiste en obtener mediante “ciertas manipulaciones” un sistema equivalente al inicial que sea más fácil de estudiar.

Veamos qué entendemos por un sistema fácil de estudiar y qué manipulaciones son posibles para llegar a él.

Matrices escalonadas. Operaciones elementales

Una matriz A se dice que está en forma ***escalonada por filas*** si cumple las siguientes condiciones:

- Las filas nulas, si las tienen, son las últimas.
- El primer elemento no nulo de una fila no nula es un 1, a este elemento se le llama ***pivote***.
- Cada pivote está en una columna posterior al pivote anterior.

Es decir, una matriz escalonada por filas tiene una forma del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & \star & \star & \cdots & \star & \cdots & \star & \cdots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \star & \cdots & \star & \cdots & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \star & \cdots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

donde en el lugar que ocupan los astericos, $\star$, puede haber cualquier valor.

El hecho de que cada pivote de una fila no nula esté en una columna posterior al pivote de la fila anterior hace que la columna en la que hay un pivote todos las entradas que hay por debajo del pivote sean 0.

Si en una matriz escalonada por filas A se tiene que, además, en cada columna que contenga un pivote todos los demás elementos de esa columna son nulos, entonces se dice que A está en forma ***escalonada reducida por filas***. Es decir, una matriz escalonada reducida por fila tiene una forma del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \star & \cdots & 0 & \cdots & \star & \cdots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \star & \cdots & 0 & \cdots & \star & \cdots & \star \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \star & \cdots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices correspondientes tienen forma escalonada reducida son muy fáciles de resolver: basta despejar las incógnitas correspondientes a los pivotes en función de las restantes, que actuarán como parámetros.

Así, las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_3 - 3x_4 & = & 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}\right\}$$

(cuya matriz tiene forma escalonada reducida) cumplen que $x_1 = 1 - x_3 + 3x_4$ y $x_2 = x_3 - x_4$ y, para cualquier valor que asignemos a x_3 y a x_4, tomando $x_1 = 1 - x_3 + 3x_4$ y $x_2 = x_3 - x_4$, obtenemos una solución del sistema. Es decir, todas las soluciones de este sistema son de la forma $(1 - x_3 + 3x_4, x_3 - x_4, x_3, x_4)$.

Operaciones elementales. El método de Gauss

El **método de Gauss** está basado en dos propiedades. La primera de ellas es que las soluciones de un sistema son también las soluciones del sistema obtenido haciendo en éste una operación de alguno de los siguientes tipos:

1. ***Intercambiar dos de las ecuaciones***.

   Corresponde a intercambiar las dos filas correspondientes de la matriz ampliada ($F_i \leftrightarrow F_j$).

2. ***Multiplicar ambos miembros de una ecuación por una constante no nula***.

   Corresponde a multiplicar la correspondiente fila de la matriz ampliada por la constante no nula (rF_i).

3. ***Añadir a una ecuación el resultado de multiplicar otra ecuación por una constante***.

   Corresponde a sumar a una de las filas de la matriz otra fila multiplicada por la constante ($F_i + rF_k$).

A cada una de estas operaciones en las filas de la matriz se le denomina ***operación elemental por filas***.

Teniendo en cuenta lo anterior, se tiene que ***Cualquier secuencia de operaciones elementales transforma un sistema de ecuaciones lineales dado en otro equivalente***.

La segunda propiedad en la que se base el método de Gauss es la siguiente: ***Toda matriz puede llevarse a una matriz en forma escalonada o escalonada reducida por filas mediante una sucesión de operaciones elementales en las filas.***

El algoritmo para conseguirlo es el siguiente:

- Localizar la primera columna no nula de la matriz y en ella un primer elemento no nulo, a.
- Intercambiando dos filas podemos poner este elemento a en la primera fila.
- Multiplicando esta nueva primera fila por a^{-1}, conseguimos que el primer elemento no nulo sea un 1, que será un pivote.
- Para cada una de las restantes filas, hacemos una operación del tipo $F_i - cF_1$ para conseguir ceros debajo de este pivote.
- Repetimos el proceso con la submatriz que resulta de eliminar la primera fila hasta que no nos queden filas o las que queden sean todas nulas. Tendremos una matriz en forma escalonada.
- Con operaciones tipo $F_i - cF_k$ hacemos ceros encima del último pivote. Repetimos el proceso desde el penúltimo pivote hasta el primero. Obtenemos una matriz en forma escalonada reducida.

Ejemplo 6.1. Dado el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} x-2y+z-4t &=& 1\\ x-2y+2z+2t &=& 7\\ -2x+4y+2z+32t &=& 22 \end{array}\right\}$$

haciendo operaciones elementales por filas en su matriz ampliada podemos llegar a una matriz escalonada reducida

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -4 & 1\\ 1 & -2 & 2 & 2 & 7\\ -2 & 4 & 2 & 32 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-F_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6\\ -2 & 4 & 2 & 32 & 22 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+2F_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 4 & 24 & 24 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3-4F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 1 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & -10 & -5\\ 0 & 0 & 1 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

por lo que el sistema inicial es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1-2x_2-10x_4 &=& -5\\ x_3+6x_4 &=& 6 \end{array}\right\}$$

cuyas soluciones son de la forma $(-5+2x_2+10x_4, x_2, 6-6x_4, x_4)$.

Ejercicio 1. Discutir y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x+y-z & = & 3 \\ x+2y+3z & = & 2 \\ -x+y+4z & = & -1 \\ 3x+2y+2z & = & 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcr} x+2y+3z & = & 1 \\ 2x+y-z & = & 3 \\ -x+y+4z & = & -1 \end{array}\right\}$$

Rango de una matriz. Teorema de Rouché-Frobenius

Se llama ***rango*** de una matriz A, y se denotará por $rg(A)$, al número de pivotes (filas no nulas) que se obtienen al transformarla en una matriz en forma escalonada o escalonada reducida.

Se verifican las siguientes propiedades:

- El rango es menor o igual que el número de filas y de columnas.
- El rango no decrece si le añadimos una columna a la derecha.
- Si una matriz se obtiene a partir de otra por operaciones elementales, ambas tienen el mismo rango.

La caracterización de los sistemas de ecuaciones lineales compatibles y el número de parámetros de los que dependen sus soluciones nos los proporciona el **Teorema de Rouché-Frobenius** que establece que si $\mathcal{S}$ es un sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas y matriz ampliada $(A|B)$, entonces:

1. $\mathcal{S}$ es un sistema compatible si y sólo si $rg(A) = rg(A|B)$.
2. Si $\mathcal{S}$ es compatible, entonces $\mathcal{S}$ es determinado si y sólo si $rg(A) = n$.
3. Si $\mathcal{S}$ es compatible indeterminado, el conjunto de soluciones puede expresarse en función de $n - rg(A) > 0$ parámetros (grados de libertad).

Como consecuencia del Teorema de Rouché-Frobenius se cumplen:

1. Un sistema homogéneo con n incógnitas y matriz de coeficientes A es determinado si y sólo si $rg(A) = n$.
2. Un sistema con menos ecuaciones que incógnitas no puede ser compatible determinado.

6.3. Operaciones con matrices

Suma y producto por escalares

Dadas dos matrices $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ en $M_{m,n}(\mathbb{R})$ se define la ***suma*** de A y B, $A + B$, como la matriz

$$A + B = (c_{ij}) \text{ en } M_{m,n}(\mathbb{R})$$

donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para cada $i = 1, \ldots, m$ y para cada $j = i, \ldots, n$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ en $M_{m,n}(\mathbb{R})$ y r en $\mathbb{R}$ se define el ***producto de r por A***, que se representará por rA, como la matriz

$$rA = (c_{ij}) \text{ en } M_{m,n}(\mathbb{R})$$

donde $c_{ij} = ra_{ij}$ para cada $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

$$3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Estas operaciones cumplen las siguientes propiedades:

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociatividad).
2. Existe una matriz, aquella cuyos elementos son todos nulos, denominada ***matriz nula*** y que denotaremos por 0, que satisface $A + 0 = 0 + A = A$ para cada A en $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (elemento neutro para la suma de matrices).
3. $A + B = B + A$ (conmutatividad).
4. Para cada matriz A en $M_{m,n}(\mathbb{R})$ existe una matriz, $-A$, tal que $A + (-A) = 0$ (***matriz opuesta*** de A). Si $A(a_{ij})$, entonces $-A = (-a_{ij})$.
5. $(rs)A = r(sA)$.
6. $(r + s)A = rA + sA$ (distributividad).
7. $r(A + B) = rA + rB$, (distributividad).

Producto de matrices

Dadas $A = (a_{ij})$ en $M_{m,n}(\mathbb{R})$ y $B = (b_{ij})$ en $M_{n,p}(\mathbb{R})$, se define el ***producto de A y B***, que se denotará por AB , como la matriz $AB = (c_{ij})$ en $M_{m,p}(K)$ donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{np} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

El producto de dos matrices sólo es posible si el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 9 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta cómo es el producto de matrices, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede expresarse matricialmente de la forma $AX = B$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

El producto de matrices no es, en general, conmutativo, ni siquiera cuando es posible multiplicarlas por ambos lados.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El producto de matrices verifica las siguientes propiedades:

1. $(AB)C = A(BC)$.

2. $A(B + C) = AB + AC$.

3. Para cada número natural n, la matriz

$$I_n = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ en } M_n(\mathbb{R}),$$

   denominada ***matriz identidad de tamaño*** n, satisface que $I_n A = A$ para cada matriz A en $M_{n,m}(\mathbb{R})$ y $BI_n = B$ para cada matriz B en $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

   En particular, si A es una matriz cuadrada $n \times n$ se tiene que $I_n A = AI_n = A$.

4. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$.

Matrices inversibles

Una matriz cuadrada A en $M_n(K)$ se dice que es una matriz ***inversible*** si existe una matriz B en $M_n(K)$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Dicha matriz, si existe, es única, se denominará ***matriz inversa*** de A y se representará por A^{-1}.

Si A y B en $M_n(K)$ son dos matrices inversibles, entonces AB es también una matriz inversible y, además,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

6.4. Determinantes

Determinante de una matriz

A cada matriz cuadrada A se le asocia un escalar llamado ***determinante de A*** y que representaremos por $|A|$ o por $det(A)$, que permite estudiar algunas de sus propiedades.

Para matrices 2×2 el determinante se define como:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Para matrices 3×3 de la forma:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & \quad -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

(Regla de Sarrus)

Si $A = (a_{ij})$ en $M_n(\mathbb{R})$, dados i, j en $\{1, 2, \ldots, n\}$, se denomina **menor complementario del elemento** a_{ij} al determinante $|A_{ij}|$ de la matriz A_{ij} en $M_{n-1}(\mathbb{R})$ que se obtiene eliminando la fila i y la columna j de la matriz A.

$$|A_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \cdots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \cdots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \cdots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \cdots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Se llama **adjunto de** a_{ij} **en** A a $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$.

El determinante se define, por recurrencia, como:

$$\begin{aligned} |(a_{ij})| &= (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}| \\ &= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in-1}\Delta_{in-1} + a_{in}\Delta_{in} \end{aligned}$$

(Desarrollo del determinante por la fila i) o, como

$$|(A)| = (-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|$$

(Desarrollo del determinante por la columna j)

Ambas expresiones valen lo mismo.

Propiedades de los determinantes

Los determinantes verifican las siguientes propiedades:

- El determinante de la matriz identidad es 1.

- Si una matriz tiene una fila nula, o una columna nula, su determinante es cero.
- Si se intercambian dos filas ($F_i \leftrightarrow F_j$), o dos columnas, el determinante cambia de signo.
- Si hacemos operaciones elementales del tipo $F_i + rF_j$ en las filas, o las análogas por columnas, el determinante no varía.
- Si una matriz tiene dos filas, o dos columnas proporcionales, su determinante es cero.
- Si hacemos una operación elemental del tipo rF_i en las filas, o las columnas, el determinante queda multiplicado por r.
- Si una fila de la matriz es suma de dos sumandos, el determinante es la suma de los determinantes que resultan de sustituir en la matriz dicha fila por cada uno de los sumandos.

Para calcular un determinante podemos hacer operaciones elementales fila o columna para conseguir ceros en alguna fila (o columna) y hacer entonces el desarrollo por dicha fila (o columna.

Ejemplo 6.2. El siguiente determinante se ha calculado restando la primera fila a cada una de las restantes, desarrollando a continuación por la segunda columna y, después, por la segunda fila

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

El determinante de un producto de matrices es el producto de los correspondientes determinantes.

$$|AB| = |A||B|$$

Los determinantes sirven para caracterizar las matrices inversibles ya que se tiene el siguiente resultado:

Para una matriz A cuadrada de tamaño $n \times n$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1. A es inversible.
2. $|A| \neq 0$.
3. $rg(A) = n$.
4. La única solución del sistema de ecuaciones homogéneo con matriz de coeficientes A es la nula $(0, \dots, 0)$.
5. Todo sistema de ecuaciones con matriz de coeficientes A es compatible determinado.

Cálculo de matrices inversas

Si A es una matriz inversible y la inversa de A tiene por columnas $A^{-1} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$, entonces, tal y como está definido el producto de matrices, se tiene que

$$AA^{-1} = A(C_1, C_2, \cdots, C_n) = (AC_1, AC_2, \cdots AC_n) = I_n$$

y si denotamos por E_i las columnas de I_n,

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{fila } i\text{-ésima}$$

cada columna C_i de A^{-1} es solución del sistema de ecuaciones lineales

$$AX = E_i$$

Esto, junto con el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones, nos proporciona un método para el cálculo de la inversa de una matriz: haciendo operaciones elementales fila en la matriz ampliada $(A|E_i)$ del sistema $AX = E_i$, se llegará a una matriz en la forma escalonada reducida $(A'|C_i)$ donde, como A tiene rango n, $A' = I_n$ y C_i es la solución del sistema.

Como las operaciones fila que se han de hacer en A pueden ser las mismas para todos los sistemas, podemos hacerlas para todos ellos simultáneamente;

$$(A|I_n) = (A|E_1, E_2, \cdots, E_n) \xrightarrow{o.e.f.} (I_n|C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

es decir, haciendo operaciones elementales fila en la matriz $(A|I_n)$, cuando en A llegamos a la matriz identidad I_n en I_n habremos llegado a la matriz inversa de A, A^{-1}.

Ejemplo 6.3. Aplicando el método a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

obtenemos que su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los determinantes también nos proporcionan un método para calcular la inversa de una matriz.

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz inversible y denotamos por

$$B = (b_{ij}) = (\Delta_{ij})^t$$

la matriz traspuesta de la matriz cuyas entradas son los adjuntos de la matriz A, como

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \cdots + a_{in}b_{ni}$$

y, si $i \neq j$,

$$a_{i1}\Delta_{j1} + a_{i2}\Delta_{j2} + \cdots + a_{in}\Delta_{jn} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = 0$$

se tiene que

$$AB = |A|I_n$$

y, como $|A| \neq 0$, resulta que $A\frac{1}{|A|}B = I_n$, de donde

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}B = \frac{1}{|A|}(\Delta_{ij})^t$$

Ejemplo 6.4. Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se tiene que $|A| = -2$ y la matriz de sus adjuntos es

$$(\Delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matriz que ya habíamos obtenido por el método de las operaciones elementales.

6.5. Vectores. Bases

El concepto de vector aparece de forma natural en Física. Algunas magnitudes pueden ser especificadas mediante un número (en unidades apropiadas), se denominan magnitudes **escalares**. Otras requieren de más especificidades: dirección, velocidad, etc.; son las magnitudes **vectoriales**.

Trabajaremos básicamente con vectores en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$, en los que supondremos fijados unos ejes cartesianos. Por tanto, los puntos del plano o el espacio quedan determinados por 2 ó 3 coordenadas:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid \text{ con } x, y \text{ números reales}\}$$

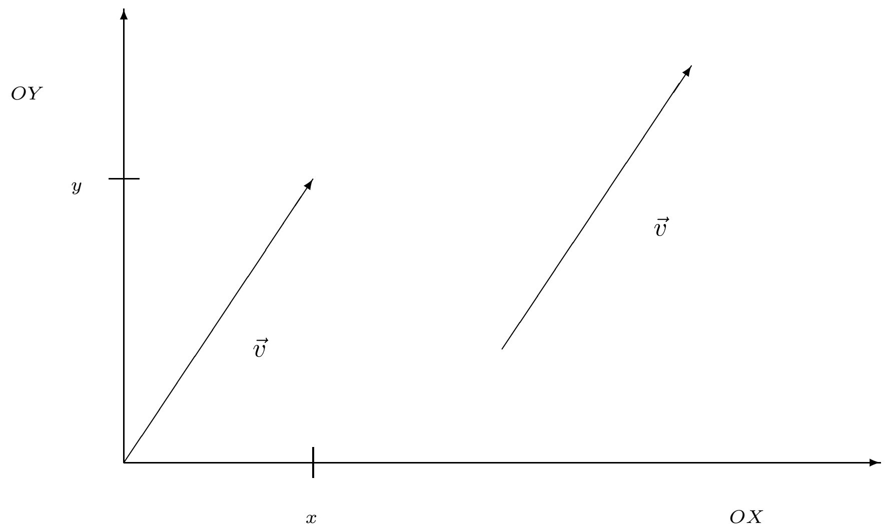
$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid \text{ con } x, y, z \text{ números reales}\}$$

La mayoría de los conceptos que usaremos tendrán sentido en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, y serán generalizables al espacio n-dimensional

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \text{ con } x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ números reales}\}.$$

Aunque trabajemos con vectores de $\mathbb{R}^3$ haremos los dibujos en $\mathbb{R}^2$.

Un **vector** $\vec{v} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ (o de $\mathbb{R}^n$) es el segmento orientado (la **flecha**) que une el origen con el punto de coordenadas (x, y, z), o más generalmente cualquier segmento orientado con la misma longitud, dirección y sentido que aquél (aunque varíen su origen y su extremo).



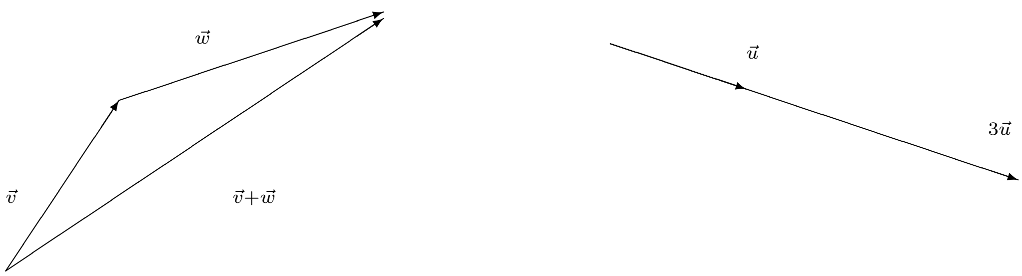
Operaciones con vectores. Combinaciones lineales

Los vectores se pueden sumar entre sí o multiplicar por un escalar para obtener nuevos vectores; ambas operaciones se hacen coordenada a coordenada :

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

$$r(x, y, z) = (rx, ry, rz)$$

Geométricamente, la suma es el vector que se obtiene al yuxtaponer los sumandos, y el producto es el vector que se obtiene al escalar el vector dado por un factor r.



Una **combinación lineal** de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ es cualquier expresión de la forma

$$r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_k\vec{v}_k$$

donde $r_1, r_2, \ldots, r_k$ son escalares (números reales) que se denominan **coeficientes** de la combinación lineal.

Por ejemplo, el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de dos vectores consiste en los vectores que están en el plano determinado por esos vectores (aquí se supone que el origen de todos los vectores considerados está el origen de coordenadas).

Se llama **base canónica** de $\mathbb{R}^3$ al conjunto formado por los tres vectores

$$\vec{\imath} = (1,0,0) \qquad \vec{\jmath} = (0,1,0) \qquad \vec{k} = (0,0,1)$$

Cada vector $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ se expresa como combinación lineal de estos vectores:

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

y esta expresión es única en el sentido de que no se pueden elegir otros coeficientes.

Bases y coordenadas

A partir de ahora escribiremos las coordenadas de los vectores en columnas; aunque a veces escribiremos estos vectores-columna como traspuestos de vectores-fila, como a continuación.

Dados dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)^t$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)^t$ de $\mathbb{R}^2$, diremos que el conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una **base** de $\mathbb{R}^2$ si la matriz

$$P_{\mathcal{B}} = (\vec{u}, \vec{v}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

es inversible, o sea si

$$\det(P_{\mathcal{B}}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Análogamente, un conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ de tres vectores de $\mathbb{R}^3$ es una **base** de $\mathbb{R}^3$ si la matriz

$$P_{\mathcal{B}} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

es inversible, o sea si

$$\det(P_{\mathcal{B}}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, entonces cualquier vector $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^2$ se puede poner de modo único como combinación lineal de los vectores de la base, es decir, existen escalares únicos x, y (a los que denominaremos las **coordenadas** de $\vec{b}$ en la base $\mathcal{B}$) tales que

$$\vec{b} = x\,\vec{u} + y\vec{v}$$

El vector columna de estas coordenadas se denotará por $[\vec{b}]_{\mathcal{B}}$, y se puede calcular como la solución, que además es única, del sistema

$$P_{\mathcal{B}}X = \vec{b}$$

con matriz ampliada

$$(P_{\mathcal{B}} \,|\, \vec{b}) = (\vec{u}\;\vec{v} \,|\, \vec{b})$$

o mediante la fórmula

$$[\vec{b}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot \vec{b}$$

En $\mathbb{R}^3$ (y en dimensiones mayores) se tiene una situación análoga: Si $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base y $\vec{b}$ es cualquier vector , entonces existe una única terna $[\vec{b}]_{\mathcal{B}} = (x, y, z)^t$ de **coordenadas** de $\vec{b}$ en $\mathcal{B}$ que verifica

$$\vec{b} = x\,\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

y que se calcula resolviendo el sistema

$$P_{\mathcal{B}}X = \vec{b}$$

con matriz ampliada

$$(P_{\mathcal{B}} \,|\, \vec{b})$$

o aplicando la fórmula

$$[\vec{b}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot \vec{b}$$

Un ejemplo especialmente simple, pero importante es el siguiente :

En $\mathbb{R}^2$, el conjunto de vectores $\mathcal{C} = \{(1,0)^t, (0,1)^t\}$ da lugar a la matriz $P_{\mathcal{C}} = I_2$, y por tanto es una base, la **base canónica** de $\mathbb{R}^2$.

Como también $P_{\mathcal{C}}^{-1} = I_2$, las coordenadas de un vector en la base canónica son sus coordenadas “usuales”.

Análogamente, $\mathbb{R}^3$ tiene la base canónica

$$\mathcal{C} = \{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t\}$$

con las mismas propiedades.

Ejemplo 6.5. Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

demostrar que $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ es una base y calcular las coordenadas en $\mathcal{B}$ de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

La matriz

$$P_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

tiene determinante -2 e inversa

$$P_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 \\ 3/2 & -1 \end{pmatrix},$$

luego $\mathcal{B}$ es una base y las coordenadas pedidas son

$$[\vec{a}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\vec{a} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{b}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[\vec{c}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{-1}\vec{c} = \begin{pmatrix} 43/2 \\ -23/2 \end{pmatrix}$$

Esto quiere decir que las expresiones de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son

$$\vec{a} = \frac{-5}{2}\,\vec{u} + \frac{3}{2}\,\vec{v}$$

$$\vec{b} = 2\vec{u} - \vec{v}$$

$$\vec{c} = \frac{43}{2}\,\vec{u} - \frac{23}{2}\,\vec{v}$$

Este tipo de igualdades se pueden comprobar muy fácilmente, incluso podemos ahorrarnos las fracciones comprobando por ejemplo así:

$$43\vec{u} - 23\vec{v} = 43\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 23\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 129 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 92 \\ 115 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 14 \end{pmatrix} = 2\vec{c}$$

Ejemplo 6.6. Dados los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

demostrar que $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es una base y calcular las coordenadas en $\mathcal{B}$ de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

La matriz $P_{\mathcal{B}} = (\vec{u}\ \vec{v}\ \vec{w})$ tiene determinante -1 y por tanto $\mathcal{B}$ es una base. Para calcular las coordenadas podríamos calcular la inversa de $P_{\mathcal{B}}$ y multiplicarla por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, pero se trabaja un poco menos resolviendo simultáneamente los sistemas $(P \,|\, \vec{a}\,)$ y $(P \,|\, \vec{b}\,)$ como sigue:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$

Por tanto $[\vec{a}]_{\mathcal{B}} = (-3, 6, -2)^t$ y $[\vec{b}]_{\mathcal{B}} = (4, -6, 3)^t$.

Si tenemos k vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ con coordenadas

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \vec{v}_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$$

denotaremos por $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ la matriz de tamaño $3 \times k$ que se obtiene al poner en la columna j las coordenadas de $\vec{v}_j$; es decir:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{pmatrix}$$

Dados k vectores de $\mathbb{R}^3$ como antes, y dados escalares $r_1, r_2, \dots, r_k$, se tiene

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_ka_k \\ r_1b_1 + r_2b_2 + \cdots + r_kb_k \\ r_1c_1 + r_2c_2 + \cdots + r_kc_k \end{pmatrix} = r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_k\vec{v}_k$$

Es decir, las coordenadas de una combinación lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ se obtienen multiplicando $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ por la matriz-columna de los coeficientes.

Por tanto, un vector $\vec{v} = (a, b, c)^t$ es combinación lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ si y sólo si el sistema con matriz ampliada

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \mid \vec{v})$$

es compatible (la solución de dicho sistema corresponde los coeficientes de la combinación lineal).

Más aún, la combinación lineal será única, en el sentido de que sólo hay un modo de elegir los coeficientes, si y sólo si el sistema dado es compatible determinado.

Ejemplo 6.7. Dados los vectores

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1)^t \qquad \vec{v}_2 = (1, 2, 3)^t \qquad \vec{v}_3 = (3, 2, 1)^t$$

describir el conjunto $\mathcal{W}$ de todas sus combinaciones lineales. ¿Son únicas las expresiones?

Un vector $\vec{v} = (x, y, z)^t$ está en $\mathcal{W}$ si y sólo si el correspondiente sistema es compatible. Operando, tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 1 & 2 & 2 & y \\ 1 & 3 & 1 & z \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & -1 & y-x \\ 0 & 2 & -2 & z-x \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & x \\ 0 & 1 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & x-2y+z \end{array}\right)$$

y esto ocurre si y sólo si no hay un pivote en la última columna , es decir, si y sólo si $x - 2y + z = 0$.

Por tanto, podemos describir el conjunto pedido como

$$\mathcal{W} = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$$

Obsérvese que las expresiones no son únicas porque el sistema nunca es determinado: el rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas.

Por ejemplo, $(1, 0, -1)^t$ y $(7, 5, 3)^t$ están en $\mathcal{W}$, mientras que $(2, 2, 3)^t$ y $(1, 0, 0)^t$ no están. Si queremos dar una expresión explícita de $(1, 0, -1)^t$ como combinación lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, es decir, si queremos dar los coeficientes , tenemos que resolver el sistema (con incógnitas x_1, x_2, x_3) que se obtiene cuando $(x, y, z)^t = (1, 0, -1)^t$, para lo que hacemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Las soluciones del sistema (que ya hemos visto que no son únicas) son

$$x_1 = 2 - 4\lambda \quad x_2 = \lambda - 1 \quad x_3 = \lambda$$

Así, por ejemplo, para $\lambda = 0$ se obtiene la combinación lineal

$$(1, 0, -1)^t = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

y para $\lambda = -1$ se obtiene la combinación lineal

$$(1, 0, -1)^t = 6\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$$