7

Diagonalización de matrices

7.1. Matrices diagonalizables

Existen diversos procesos en los que el estado en cada uno de sus pasos se puede representar por un determinado vector y en los que, además, existe una relación matricial entre el estado en cada paso y el estado en el paso anterior. Es decir, si X_k es el vector (columna) n-dimensional que representa el estado en el paso k, existe una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ tal que

$$X_k = AX_{k-1}$$

En esta situación se tiene que

$$\begin{gathered} X_k = AX_{k-1} = A(AX_{k-2}) = \\ = A^2X_{k-2} = A^2(AX_{k-3}) = A^3X_{k-3} = \cdots = A^kX_0 \end{gathered}$$

donde X_0 representa el estado inicial.

Por tanto, conociendo el estado inicial X_0 y la potencia k-ésima de la matriz A es posible determinar el estado en el paso k, X_k, sin necesidad de determinar los estados intermedios.

Teniendo en cuenta cómo está definido el producto de matrices, no es fácil determinar cualquier potencia de una matriz arbitraria A; pero en algunos casos sí que lo es.

Un primer caso en el que es posible hacerlo es si la matriz es diagonal. Llamaremos **matriz diagonal** a una matriz cuadrada que tiene nulos todos los elementos que no están en la diagonal principal; es decir a una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

matriz que representaremos por $Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Si $D = Diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es una matriz diagonal se tiene que

$$D^2 = D\,D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

y, de forma más general,

$$D^k = \underbrace{D\,D\,\cdots\,D}_{k \text{ veces}} = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

En conclusión, para este tipo de matrices es muy fácil calcular sus potencias.

Otra situación en la que es fácil calcular las potencias de una matriz es la siguiente:

Supongamos que A es una matriz cuadrada $n \times n$ que no es diagonal, pero existe una matriz inversible P tal que la matriz $D = P^{-1}\,A\,P$ sí que es diagonal. Entonces, como $A = P\,D\,P^{-1}$, se tiene

$$A^k = \underbrace{A\,A\,\cdots\,A}_{k \text{ veces}} = \underbrace{(P\,D\,P^{-1})\,(P\,D\,P^{-1})\,\cdots\,(P\,D\,P^{-1})}_{k \text{ veces}} =$$

$$= P\,D(\,P^{-1}\,P)\,D\,(P^{-1}\,\cdots\,P)\,D\,P^{-1} = P\,\underbrace{D\,D\,\cdots\,D}_{k \text{ veces}}\,P^{-1} = P\,D^k\,P^{-1}$$

matriz que también se puede calcular fácilmente una vez conocidas las matrices P, inversible, y D, diagonal.

La situación anterior justifica la siguiente definición: Diremos que una matriz cuadrada A es una **matriz diagonalizable** si existe una matriz inversible P tal que la matriz

$$D = P^{-1}\,A\,P$$

es una matriz diagonal.

En esta situación diremos que la matriz P **diagonaliza** a la matriz A o que es una **matriz de paso** en la diagonalización de A.

A continuación veremos métodos para determinar si una matriz A dada es o no diagonalizable y, en tal caso, cómo encontrar la matriz de paso P y la matriz diagonal D.

Vectores y valores propios

Supongamos que A es una matriz cuadrada $n \times n$ diagonalizable y que P es una matriz inversible tal que

$$P^{-1}AP = D = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ son los vectores de $\mathbb{R}^n$ correspondientes a las columnas de la matriz P, $P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$; como P es inversible, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ y además, como $P^{-1}AP = D$, $AP = PD$; teniendo ahora en cuenta como actúa el producto de matrices, resulta que

$$AP = A(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) = (A\vec{u}_1, A\vec{u}_2, \dots, A\vec{u}_n) =$$

$$= (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1\vec{u}_1, \lambda_2\vec{u}_2, \dots, \lambda_n\vec{u}_n)$$

Es decir, para cada i, $1 \leq i \leq n$, se tiene que $A\vec{u}_i = \lambda_i\vec{u}_i$.

Esto justifica la siguiente definición: Dada una matriz cuadrada real $(n \times n)$ A, se dice que un vector no nulo $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ es un ***vector propio*** o un ***autovector*** de la matriz A si existe un escalar λ, que denominaremos ***valor propio*** o ***autovalor*** asociado a $\vec{u}$, tal que $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$.

Si A es diagonalizable, existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de A.

Recíprocamente, si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ es una base formada por vectores propios de una matriz A y para cada i se tiene que $\vec{u}_i = \lambda_i\vec{u}_i$ (el valor propio de cada $\vec{u}_i$ es λ_i), resulta que la matriz $P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)$ es inversible y, además,

$$AP = A(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n) = (A\vec{u}_1, A\vec{u}_2, \dots, A\vec{u}_n) =$$

$$= (\lambda_1\vec{u}_1, \lambda_2\vec{u}_2, \dots, \lambda_n\vec{u}_n) = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n)Diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

de donde $AP = PDiag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ y, por tanto, A es diagonalizable.

En resumen, **una matriz A es diagonalizable precisamente cuando existe una base formada por vectores propios de A.**

Polinomio característico

Para una matriz cuadrada A, si I es la matriz identidad del mismo tamaño que A, se tiene

$$A\vec{u} = \lambda\vec{u} \iff A\vec{u} = \lambda I\vec{u} \iff (\lambda I - A)\vec{u} = 0$$

Por tanto, λ es un valor propio de la matriz A precisamente si el sistema homogéneo $(\lambda I - A)X = 0$ tiene soluciones no nulas, o lo que es equivalente, si $det(\lambda I - A) = 0$. Las soluciones no nulas de este sistema homogéneo son precisamente los vectores propios de la matriz A correspondientes al valor propio λ.

Al desarrollar el determinante $det(\lambda I - A)$ se obtiene un polinomio en λ de grado el tamaño de A. A dicho polinomio se le denomina ***polinomio característico*** de la matriz A, lo representaremos por $p_A(\lambda)$.

$$p_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$$

En resumen, los vectores propios de una matriz A se encuentran de la siguiente forma:

- Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico $p_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$.
- Para cada uno de estos valores propios, λ_0, sus vectores propios asociados son las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(\lambda_0 I - A)X = 0$.

Así, el cálculo de los autovalores se reduce al cálculo de las raíces de un polinomio. Conocidos los autovalores, el cálculo de los autovectores correspondientes se reduce a solucionar un sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Muchas veces, calculados estos autovectores, es muy fácil extraer de ellos una base y entonces podemos diagonalizar la matriz.

Diagonalización

Veamos, a través de algunos ejemplos, distintas situaciones que se nos puede presentar a la hora de estudiar la posible diagonalización de una matriz.

Ejemplo 7.1. Dada la siguiente matriz A, calcular sus valores y vectores propios, extraer de éstos una base y encontrar, si es posible, una matriz P que diagonalice a A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda - 4 & -1 \\ 2 & -2 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 10\lambda^2 + 33\lambda - 36 = (\lambda - 3)^2(\lambda - 4)$$

Por tanto A tiene dos valores propios: $\lambda_1 = 3$, con multiplicidad dos, y $\lambda_2 = 4$, con multiplicidad uno.

Para hallar los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 3$ resolvemos el sistema homogéneo con matriz de coeficientes $3I - A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se dice entonces que los vectores $\vec{v}_1 = (1,1,0)^t$ y $\vec{v}_2 = (1,0,1)^t$ son ***generadores*** de los vectores propios asociados a $\lambda_1 = 3$, en el sentido de que éstos se obtienen variando los parámetros en la expresión $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2$. El número de parámetros coincide, en este caso, con la multiplicidad del valor propio.

Para hallar los vectores propios de $\lambda_2 = 4$ resolvemos el sistema con matriz $4I - A$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma \\ \gamma \\ 2\gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

de modo que $\vec{v}_3 = (2,1,2)^t$ genera los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 4$. Cuando la multiplicidad de un valor propio es uno, como en este caso, aparece necesariamente un único parámetro.

La matriz que tiene los vectores $\vec{v}_i$ en sus columnas

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es invertible (pues $|P| = -1 \neq 0$) y por tanto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base de vectores propios, A es diagonalizable y P es una matriz de paso. Esto significa que

$$P^{-1}AP = D = Diag(3,3,4)$$

donde D es la matriz cuya diagonal está los valores propios de los $\vec{v}_i$ en el orden adecuado.

La igualdad $P^{-1}AP = D$ equivale a $AP = PD$ (multiplicando a la izquierda por P), que es mucho más fácil de comprobar que la primera porque no hay que calcular P^{-1} y porque D es diagonal.

Ejemplo 7.2. Dada la siguiente matriz A, calcular sus autovalores y autovectores, y encontrar una matriz P que diagonalice a A:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ -9 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de A es

$$p_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 8 & 2 & -6 \\ -3 & \lambda - 1 & -3 \\ 9 & -3 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = (\lambda - 2)^2(\lambda + 2)$$

y por tanto A tiene dos autovalores $\lambda_1 = 2$, con multiplicidad dos, y $\lambda_2 = -2$, con multiplicidad uno. Para hallar los autovectores resolvemos los sistemas homogéneos con matrices $2I - A$ y $-2I - A$.

$$(2I-A) \to \begin{pmatrix} -6 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & -3 \\ 9 & -3 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

También dos parámetros, igual que su multiplicidad.

$$(-2I - A) \to \begin{pmatrix} -10 & 2 & -6 \\ -3 & -3 & -3 \\ 9 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -10 & 2 & -6 \\ 9 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & 4 \\ 0 & -12 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Como en el ejemplo anterior, los vectores que multiplican a los parámetros α, β y γ forman una matriz de paso

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad (|P| = 4)$$

que verifica $P^{-1}AP = D = Diag(2, 2, -2)$, y la igualdad equivalente $AP = PD$ es muy fácil de comprobar.

En los ejemplos anteriores **el número de parámetros de cada valor propio coincide con su multiplicidad en el polinomio característico**.

En otros casos, el cálculo de los valores y vectores propios nos puede llevar a la conclusión de que la matriz en cuestión **no** es diagonalizable.

Por ejemplo, el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

es

$$P(\lambda) = \det \begin{vmatrix} \lambda - 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & \lambda - 1/2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \lambda^2 - \lambda + 1$$

Este polinomio no tiene raíces reales, por lo que no hay valores propios reales y por tanto A no es diagonalizable (sobre $\mathbb{R}$).

En otros casos, aún existiendo algunos valores propios, no es posible completar una base formada por vectores propios, por lo que la correspondiente matriz tampoco sería diagonalizable.

Ejemplo 7.3. Calcular los valores y vectores propios de la siguiente matriz, y deducir que no es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Desarrollando $|\lambda I - A|$ por la primera columna se obtiene $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Por tanto A tiene los autovalores 1, con multiplicidad dos, y 2, con multiplicidad uno.

Para hallar los autovectores resolvemos

$$(I - A) \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(su multiplicidad era dos)}$$

$$(2I-A) \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto los vectores propios son múltiplos de $\vec{v}_1 = (1,0,0)^t$ o de $\vec{v}_2 = (0,1,2)^t$. Tres de estos vectores no pueden formar una base, porque al menos dos son proporcionales. En consecuencia no existe una base de vectores propios y por tanto A **no** es diagonalizable. Para el valor propio 1, el número de parámetros es menor que su multiplicidad en el polinomio característico.

En resumen, si n es el tamaño de una matriz A y m es el número total de generadores de sus vectores propios (o lo que es lo mismo, el número total de parámetros que aparecen al resolver los sistemas homogéneos asociados a los valores propios), se tiene:

- **Si** $m = n$ **entonces** A **es diagonalizable** (el número de parámetros para cada valor propio coincide con su multiplicidad) y ya hemos visto en los ejemplos cómo construir una base de vectores propios, o una matriz de paso.

- **Si** $m < n$ **entonces** A **no es diagonalizable** (no hay suficientes vectores propios para formar una base, bien porque no hay suficientes valores propios o bien porque para alguno de ellos el número de parámetros es menor que su multiplicidad).

El caso $m > n$ no puede ocurrir.

Se verifica que **si una matriz cuadrada** A **de tamaño** n **tiene** n **valores propios distintos, entonces es diagonalizable**; para cada uno de sus valores propios podremos encontrar un vector propio de forma que todos ellos juntos formen una base.

7.2. Aplicaciones

Ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes (homogéneas) son expresiones de la forma:

$$x_{n+r} + a_1 x_{n+r-1} + \cdots + a_r x_n = 0$$

Son expresiones que relacionan linealmente un determinado número de términos consecutivos de una sucesión.

La diferencia entre el mayor y el menor índice de los términos relacionados se denomina **orden** de la ecuación (en el caso anterior r).

La diagonalización de matrices puede ayudar a encontrar la expresión del término general x_n de la sucesión en función de n. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 7.4. Encontrar el término general de la sucesión de Fibonacci:

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \qquad \text{con } x_0 = 1, x_1 = 1$$

A partir de la sucesión $\{x_n\}$ podemos construir otra auxiliar

$$Y_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

De esta forma, la condición que define la sucesión de Fibonacci se transforma en la siguiente relación matricial:

$$Y_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n + x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$Y_{n+1} = A\,Y_n = A^2\,Y_{n-1} = \cdots = A^n\,Y_1 = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

Como $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, su polinomio característico $p_A(\lambda)$ es

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 = \left(\lambda - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

La matriz A es diagonalizable, con forma diagonal y matriz de paso dadas por

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y el término general x_{n+1} de la sucesión de Fibonacci se puede calcular a partir de la expresión:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones en diferencias

Un sistema de ecuaciones en diferencias lineales de primer orden con coeficientes constantes (homogéneo) es, por ejemplo, un sistema de la forma:

$$\left.\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & a_{11}x_n + a_{12}y_n + a_{13}z_n \\ y_{n+1} & = & a_{21}x_n + a_{22}y_n + a_{23}z_n \\ z_{n+1} & = & a_{31}x_n + a_{32}y_n + a_{33}z_n \end{array}\right\}$$

Es decir, expresa una relación lineal entre los términos de unas determinadas sucesiones y sus términos inmediatamente anteriores.

Si denotamos por S_n a la matriz columna formada por términos enésimos de las tres sucesiones, este sistema se puede expresar matricialmente de la forma

$$S_{n+1} = A\,S_n$$

y, por recurrencia,

$$S_n = A^n \, S_0$$

Si la matriz A es diagonalizable con matriz diagonal D y matriz de paso P, se tendrá que $A = P^{-1}DP$ y, por tanto,

$$S_n = A^n \, S_0 = (P^{-1}DP)^n \, S_0 = P^{-1}D^n P \, S_0$$

expresión a partir de la cual podremos obtener el término general de cada una de las sucesiones en función de n.

Ejemplo 7.5. De la población que reside en la Región de Murcia se supone que cada año un 10 % de la que reside fuera de la capital se traslada a vivir a ella y que un 20 % de la que residía en la capital se va a vivir fuera de ella. Expresar matricialmente la relación existente en los términos consecutivos de las sucesiones $\{x_n\}$ de residentes en la capital e $\{y_n\}$ de residentes fuera de ella un determinado año y determinar el término general de dichas sucesiones si al principio vivían en Murcia capital 100 000 habitantes y fuera de ella 800 000. Â¿Cuántos habitantes tendrá la capital al cabo de 20 años? Â¿Existe una tendencia a largo plazo? Â¿Cuál es?

Nos dicen que de la población que reside en la Región de Murcia se supone que cada año un 10 % de la que reside fuera de la capital se traslada a vivir a ella y que un 20 % de la que residía en la capital se va a vivir fuera de ella. Denotando por $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ las sucesiones correspondientes a los residentes en la capital y fuera de ella, respectivamente, un determinado año, la situación la podemos representar matricialmente como

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8x_n + 0.1y_n \\ 0.2x_n + 0.9y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Por lo que

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

y el problema se resolverá diagonalizando la matriz

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$$

Calculando sus valores y vectores propios se obtienen el valor propio $7/10$, con multiplicidad uno y vector propio $(1, -1)$, y el valor propio 1, también con multiplicidad uno y vector propio $(1, 2)$.

La matriz diagonal será

$$D = \begin{pmatrix} 7/10 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

con inversa

$$Q = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Así, podemos obtener el término general de ambas sucesiones

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = PD^nQ \begin{pmatrix} 100000 \\ 800000 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (7/10)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100000 \\ 800000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300000 - 2\,10^{5-n}\,7^n \\ 2\,10^{5-n}\,7^n + 600000 \end{pmatrix}$$

y podemos determinar el número de habitantes dentro y fuera de la capital al cabo de 20 años, $x_n = 299840.4154674048$ (≈ 299840) e $y_n = 600159.5845325952$ (≈ 600160).

Calculando los límites, cuando n tiende a ∞, de ambas sucesiones

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (300000 - 2\,10^{5-n}\,7^n) = 300000 \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (600000 + 2\,10^{5-n}\,7^n) = 600000$$

encontramos que la tendencia a largo plazo es que en la capital vivan 300000 personas y fuera de ella 600000.

Sistemas diferenciales lineales con coeficientes constantes

Un sistema diferencial lineal con coeficientes constantes (homogéneo) es, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{rcl} f_1'(x) & = & a_{11}f_1(x) + a_{12}f_2(x) + a_{13}f_3(x) \\ f_2'(x) & = & a_{21}f_1(x) + a_{22}f_2(x) + a_{23}f_3(x) \\ f_3'(x) & = & a_{31}f_1(x) + a_{32}f_2(x) + a_{33}f_3(x) \end{array}\right\}$$

Es decir, expresa una relación lineal entre las derivadas de unas funciones y las propias funciones.

Si denotamos por Y a la matriz columna formada por las tres funciones y por Y' a la formada por sus derivadas, este sistema se puede expresar matricialmente de la forma

$$Y' = AY$$

Supongamos que la matriz A es diagonalizable con matriz diagonal D y matriz de paso P, se tendrá que $P^{-1}AP = D$. Entonces, si se introducen funciones auxiliares Z que dependan linealmente de las iniciales a traves de la matriz P^{-1}, es decir, de la forma $Z = P^{-1}Y$ ($Y = PZ$), cada una de las nuevas funciones será combinación lineal de las anteriores y, teniendo en en cuenta las propiedades de las derivadas, se tendrá que

$$Z' = P^{-1}Y' = P^{-1}AY = P^{-1}APZ = DZ$$

y, como D es una matriz diagonal, cada una de la nuevas funciones cumplirá una igualdad ade la forma $g'(x) = \alpha g(x)$, por lo que será de la forma $g(x) = Ce^{\alpha x}$.

Las funciones iniciales, $Y = PZ$, serán, entonces, combinaciones lineales de exponenciales en cuyos exponentes aparecen precisamente los valores propios de la matriz A.