UNIVERSIDAD
DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Matemáticas
Práctica 1

1. Calcula y comprueba el resultado con MAXIMA

   a) $2 + (-3) + 5 + (-8)$
   b) $5 - (-2) + (-8) - (-4) - 5$
   c) $5(-2)(-8) - (-4)5$
   d) $7(-3)(-8)(-8) - 3(-1)$
   e) $5 - (-2) + \frac{-8}{-4} - 5$
   f) $\frac{3}{8}\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{4}{11}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right)$
   g) $\frac{5}{9} - \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) + \frac{10}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5}\right)$
   h) $\frac{3/5}{2/3} - \frac{4}{5}\frac{4}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3/4}{3/7}$
   i) $\frac{\frac{2}{3}+\frac{-7}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{4}}{-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}$
   j) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + 5 - 3\left(\frac{4}{(5/3)} + 1\right)$

   Resultados: (a) -4, (b) -2, (c) 100, (d) -1341, (e) 4, (f) $\frac{51}{80}$, (g) $\frac{17}{36}$, (h) $-\frac{19}{12}$, (i) $\frac{41}{10}$, (j) $-\frac{599}{120}$.

2. Aunque no sabemos resolver inecuaciones con Maxima, podemos aproximarnos a esa tarea mediante dos pasos: si queremos resolver, por ejemplo, la inecuación $5 - x^2 < 2$, procedemos en dos pasos:

   a) Resolvemos la ecuación $5 - x^2 = 2$, llamemos a la solución obtenida a.
   b) Dibujamos la gráfica de $5 - x^2$ y buscamos en dicha gráfica cómo son los valores que alcanza la función en puntos menores y mayores que a, pudiendo ver así para qué valores de x se tiene $5 - x^2 < 2$.

   Resuelva las siguientes inecuaciones en $\mathbb{R}$:

   i) $5 - x^2 < 8$; *ii*) $(x - 1)(x - 3) > 0$; *iii*) $2^x < 8$
   iv) $x + 3^x < 4$; *v*) $\frac{2x-1}{3x+2} \leq 1$; *vi*) $\mid x^2 - x \mid + x > 1$
   vii) $\frac{a|x|+1}{x} < 1$; *viii*) $x + \mid x \mid < 1$; *ix*) $x - \mid x \mid > 2$
   x) $|ax + b| < c$, $a \neq 0, c > 0$.

3. Simplifique la expresiones siguientes con el comando `radcan` de MAXIMA.

   a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$
   b) $\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$
   c) $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{486}$
   d) $\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{16}$
   e) $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{18}{75}}$

4. Defina en Maxima las funciones

$$f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, & \text{si } x<0\ ;\\ (x-1)^2, & \text{si } x\geq 0.\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2x+3, & \text{si } x<-1\ ;\\ 4, & \text{si } -1\leq x\leq 1;\\ -x+5, & \text{si } x>1.\end{cases}$$

$$h(x)=f(g(x)).$$

Dibuje las gráficas de las tres funciones con x variando en los intervalos $[-2,2]$ y $[-5,5]$. Hágalo de forma que en cada intervalo las tres gráficas aparezcan en un mismo gráfico.

Vuelva a dibujarlas utilizando las opciones style y nticks de plot2d. La sintaxis es entonces:

`plot2d(`*`función`*`, [`*`rango en x`*`],[style,`*`estilo`*`],[nticks,`*`número`*`])`

donde *estilo* puede tomar varias valores, aquí utilizaremos dots y points; *número* es el número de puntos que dibujará en cada gráfica, pruebe con varios valores, p.ej. 50, 100, 500...

¿Cuál es la diferencia fundamental al dibujar con estilo dots o points y no usar dichas opciones?

5. Exprese los siguientes números complejos en forma binomial:

$(a)\ i^5+i^{19}$ $(b)\ 1+i+i^2+i^3$ $(c)\ \dfrac{1}{i}$ $(d)\ \dfrac{(3-i)^3}{(-1-i)^5}$ $(e)\ (1+i)^2$

$(f)\ \sqrt[3]{-8}$ $(g)\ \dfrac{1}{1+i}$ $(h)\ (2+3i)(3-4i)$ $(i)\ i^5+i^{16}$ $(j)\ (1+i)^3$

$(k)\ \dfrac{2+3i}{2-4i}$ $(l)\ i^{175}$ $(m)\ (1+i)^{10}$

Nota: Puede recurrir a las funciones `realpart(x)`, `imagpart(x)`, `rectform(x)` de Maxima que proporcionan respectivamente la pasrte real, la parte imaginaria y la forma binomial del número complejo x.

6. Las funciones `abs(x)`, `carg(x)` y `polarform(x)` proporcionan respectivamente el módulo, el argumento y la forma módulo-argumental de un número complejo `x`. Calcule el módulo y argumento de los siguientes números complejos:

$$\begin{array}{lll}(1+i)^2 & \frac{1+i}{1-i} & i^7+i^{10}\\ 3+4i & 1+i+i^2 & 2(i-1)+3(2+i)\\ \frac{-2}{1+\sqrt{3}i} & \frac{i}{-2-2i} & (\sqrt{3}-i)^6\\ (1+\sqrt{3}i)^8 & & \end{array}$$

7. Con Maxima podemos dibujar puntos en el plano. Esto se hace mediante la sentencia:

```
plot2d([discrete,[listapuntos]);
```

donde listapuntos es una lista de las coordenadas de los puntos, en la forma $[x_1,y_1]$,$[x_2,y_2]$,...,$[x_n,y_n]$.

Dibuje el triángulo por los puntos $3+4i$, 1, i del plano complejo. Observe que si pone en la lista de coordenadas sólo los tres puntos, el triángulo no se cierra; para conseguir cerrarlo repita las coordenadas del primer punto al final de la lista. Dibuje ahora el mismo triángulo junto con el obtenido al girarlo 30 grados[1].

Para poder dibujar dos listas de puntos a la vez tendrá que escribir:

`plot2d([[discrete,lista1],[discrete,lista2]]);` (atención al número de corchetes).

8. Si pedimos a Maxima que calcule la raíz cúbica de -8 nos dará el valor -2. Pero estamos interesados en calcular las tres raíces cúbicas de -8, dos de las cuales son complejas. Naturalmente una raíz cúbica de -8 es solución de la ecuación $z^3+8=0$. Podemos entonces pedirle a Maxima que calcule todas las raíces del polinomio z^3+8, mediante la función `allroots(expresión)`; Calcule de esta forma las tres raíces cúbicas de -8, como comprobará los resultados se dan con decimales. Utilice ahora la sentencia `solve(x^3+8=0)`; ¿qué obtiene? ¿Cuál es la diferencia con allroots?

   Resuelva las ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} 3z^2+2z+4=0 & z^2+(2-2\,i)z+1+2\,i=0 \\ 5z^2+2z+10=0 & z^2+(-3+2i)z+5-i=0 \\ z^4-16=0 & z^4+16=0 \\ z^5=4+4i & (1+i)z^3-zi=0 \end{array}$$

9. En este ejercicio se trata de dibujar las raíces cuartas, quintas, sextas y séptimas de 1 (complejas) y de observar la figura que se obtiene en cada caso. Para hacerlo con comodidad vamos a utilizar algunas nuevas funciones de Maxima.

   a) Observe que la salida de la función solve(ecuación) es una lista de ecuaciones de la forma `[x=a+b%i,...]` Si quisiéramos tratar esa lista directamente tendríamos problemas porque cualquier operación incluiría la parte "`x=`" sobre la que no podríamos operar.

   b) Para resolver el problema anterior Maxima dispone de dos funciones: `lhs(ecuación)` y `rhs(ecuación)`, que proporcionan respectivamente el miembro de la izquierda (left hand side) y la derecha (right hand side) de una ecuación.

   c) Para comprender cómo se comportan, ejecute en una celda las siguienes líneas

```
raices7:solve(x^7+1=0);
lhs(raices7[1]);
rhs(raices7[1]);
```

   d) Ahora que queda claro cómo se comportan estas funciones, se trata de definir dos listas que contengan respectivamente las partes reales e imaginarias de la lista que proporciona `solve`. Para ello utilice la función

   `makelist(expresion,variable,valorinicial,valorfinal)`,

   en donde deberá utilizar la expresión adecuada (que manejará `rhs, realpart, imagpart,`...) y donde los valores inicial y final serán 1 y el número de términos de la lista dada por solve.

   e) Concretando, para empezar tomemos las raíces cuartas de 1, es decir los ceros de x^4-1. Cree la lista de las partes reales e imaginarias. Construya nuevas listas añadiendo en cada una de ellas, en último lugar, el primero de sus elementos. Utilice `plot2d` con la siguiente sintaxis:

   `plot2d([discrete,listapartesreales,listapartesimaginarias]);`

   f) Realice ahora la tarea completa para las raíces quintas, sextas y séptimas de 1.

[1] Recuerde que para girar un número complejo z un ángulo de α radianes, basta con multiplicarlo por $e^{i\alpha}$.