



La sentencia de Maxima para el cálculo de límites es:

`limit(función, variable, punto, dirección);`

- *función* y *variable* tienen un significado claro.
- *punto* es el valor donde se desea calcular el límite, y
- *dirección* indica si se quiere tomar un límite por la derecha (en ese caso se pone **plus**) o por la izquierda (en ese caso se pone **minus**). Si este valor no se incluye entonces Maxima calcula el límite ordinario (es decir, no un límite lateral).

El valor de *punto* puede ser un número o una variable con un valor asignado (incluso en ocasiones un parámetro sin valor asignado); pero también puede tomar los siguientes valores especiales:

- **inf** para el infinito positivo,
- **minf** para el infinito negativo.

Maxima puede responder al cálculo de un límite dando su valor o con las siguientes palabras clave:

- **und**, que significa indefinido;
- **ind**, que significa indefinido, pero acotado,
- **infinity**, que es un infinito en el plano complejo (o, en todo caso, sin signo).

Se puede acceder a esta sentencia de Maxima mediante el menú **Análisis** → **Find Limit...** de wx-Maxima.

1. Comprueba las siguientes igualdades:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\log(x)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \log(x) = 0$$

2. Calcula, si existen, los siguientes límites (asegúrate de que existen, no te contentes con pedir a Maxima un resultado):

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2/2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log(x)$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \operatorname{tg}(x)$

g) $\lim_{x \rightarrow \pi/2^+} \operatorname{tg}(x)$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1}$

3. Intenta explicar la respuesta que se obtiene de Maxima al pedirle que calcule

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sen}(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{sen}(x)$$

Quizás te ayude dibujar las gráficas en intervalos adecuados.

4. Considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Intenta calcular $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ con Maxima. ¿Qué ocurre? El problema es que la función está definida a trozos. ¿Se te ocurre una forma de hacer que Maxima te permita calcular dichos límites?

5. Calcula el valor de

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

para distintos valores de $n \in \mathbb{N}$, siendo $a \in \mathbb{R}$ arbitrario. ¿Puedes conjeturar qué valor va a tener dicho límite para cualquier n ?

6. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $\begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x \leq 5 \\ 2x & \text{si } x > 5 \end{cases}$

b) $x \operatorname{sen}(1/x)$

c) $e^{1/x}$

7. Sea la función

$$b(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

definida para todo $x \neq 1$. Encuentra qué valor se debe asignar a dicha función en $x = 1$ para que se obtenga una función continua en \mathbb{R} .

8. Trate de encontrar exactamente las asíntotas horizontales, verticales u oblicuas de las siguientes funciones (dibuje las gráficas si le parece necesario). Una vez obtenidas las asíntotas dibújelas en el mismo gráfico que la gráfica de la función.

a) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b) $3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)$

c) $\frac{3x + 1}{5x + 4}$

d) $e^{1/x}$

9. Representa la función $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 1$ en el intervalo $[-10, 10]$ y en el intervalo $[-1, 1]$. Localiza dos intervalos en los que la función cambie de signo y, usando la opción Find Root del menú Ecuaciones de wxMaxima, encuentra en cada uno de dichos intervalos una raíz de la ecuación $x^4 + 2x^2 - x - 1 = 0$. Utiliza la opción Roots of Polynomial del menú Ecuaciones de wxMaxima para encontrar todas las raíces de la ecuación anterior y comprobar si las dos obtenidas anteriormente son sus únicas raíces reales.

10. Representa la función $f(x) = xe^{-x} + 1$, determina un intervalo en el que dicha función cambie de signo y utiliza WxMaxima para encontrar una raíz de la ecuación $xe^{-x} + 1 = 0$.