UNIVERSIDAD
DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Matemáticas
Práctica 3

El comando de Maxima para calcular derivadas es
`diff(`*`función`*`,`*`variable`*`,`*`veces`*`)`
donde ***veces*** es un número que indica el número de veces que queremos derivar la ***función*** indicada.

Si `diff` viene precedido de un apóstrofo, es decir:
`'diff(`*`función`*`,`*`variable`*`,`*`veces`*`)`
Maxima conserva la derivada como un símbolo, sin evaluar, lo cual puede ser útil en largos cálculos.

El símbolo que Maxima utiliza para indicar la derivada de f no es f' sino

$$\frac{d}{dx}f$$

Y para las derivadas segundas, terceras, etc. utiliza:

$$\frac{d^2}{d^2x}f, \quad \frac{d^3}{d^3x}f, \ldots$$

En wxMaxima el comando `diff` se obtiene mediante el elemento de menú Análisis -¿ Differentiate.

1. Utiliza Maxima para calcular la derivada de las siguientes funciones:

   $f(x) = 4\sqrt[4]{x}$ $\quad g(x) = \operatorname{arc\,sen}(1-x^2)$ $\quad h(x) = 3/\sqrt{x^3}$ $\quad i(x) = e^{2x^2-x-1}$

   $j(x) = \log\left(\frac{x+2}{3-x}\right)$ $\quad k(x) = \operatorname{sen}^2(x)\operatorname{tg}(3x)$ $\quad l(x) = x^3e^{-x^2}$ $\quad m(x) = 3(x^2+x+1)^{-1/2}$

2. Calcula $f'(1)$, $g'(0)$ y $h'(-1)$, siendo f, g, h las funciones así llamadas en el ejercicio anterior

   Nota: Maxima considera la derivada obtenida con el comando `diff` como una expresión, no como una función. Para poder evaluar en un valor concreto podemos utilizar el comando

   `ev(`*`expresión`*`, `*`variable`*`=`*`valor`*`).`

   Por ejemplo, si ejecutamos `ev(2*x+1,x=5)` nos devolverá el valor 11.

3. Calcula, a mano, la derivada de la función $f(x) = x^x$. Comprueba su cálculo pidiéndole el mismo a Maxima (Maxima hace bien este cálculo). ¿Coinciden? En caso contrario, ¿puedes encontrar la explicación del cálculo realizado por Maxima?

   Intenta ahora derivar las siguientes funciones:

   $$x^{\operatorname{sen} x} \qquad x^{e^x} \qquad \operatorname{sen}^{\cos(x)}(x)$$

   Verifica tus cálculos con Maxima.

4. Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a las siguientes funciones en los puntos dados:

   (a) $y = \log|x|$ en $(-e, 1)$ $\qquad$ (b) $y = x^3 + \log(x)$ en $(1, 1)$

   (c) $y = \cos(x)$ en $(\frac{\pi}{2}, 0)$ $\qquad$ (d) $y = 3e^{3x} - 5x$ en $(0, 3)$

   Dibuja la gráfica de las funciones y de la recta tangente obtenida.

5. Calcula los valores de a y b para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} ax-2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 3x-b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

sea derivable en el punto $x = 1$

6. Construya una lista cuyos elementos sean la función x^8 y cinco secantes a su gráfica; las secantes pasarán todas por el punto de abscisa 0.5 y los puntos respectivos de abscisa $0.5 + 1/2^i$, con $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Para la construcción de la lista se recomienda utilizar el comando `makelist`. Dibuje en un mismo gráfico la gráfica de x^8 y de las secantes y compruebe visualmente cómo las secantes se aproximan a una tangente a la gráfica.

7. Estudie la derivabilidad en $x = 0$ de las siguientes funciones

$$f(x) = (x^3 + x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{4}{3}} \log|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sen} x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

8. Sea $f : [0, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2 - 4x$. Prueba que cumple las hipótesis del teorema de Rolle y encuentra el punto c de $[0, 4]$ tal que $f'(c) = 0$.

9. Sea $f : [1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Determinar $f(1)$ $f(3)$ y la pendiente de la recta que pasa por $(1, f(1))$ y $(3, f(3))$. ¿Existe un valor c en $[1, 3]$ tal que la tangente a la gráfica de f en el punto $(c, f(c))$ tenga la misma pendiente que la recta antes indicada? En caso afirmativo, encontrar dicho punto.

10. El objetivo de este ejercicio es la manipulación del comando `'diff`, a fin de comprender así algunas potencialidades adicionales de Maxima. Observe el resultado de los comandos

```
D:'diff(x^3,x);
ev(D,diff);
'diff(D,x,2);
ev(%,diff);
```

Interprete los resultados. Realice otras secuencias similares.

11. Nuevos límites. Calcule los siguientes límites, indicando en cada caso qué tipo de indeterminación presentan.

    a) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[x]{x}$
    b) $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$
    c) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}\right)$
    d) $\lim_{x\to a} (a^2 - x^2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2a}\right)$
    e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+1} - x\right)$
    f) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$
    g) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$