UNIVERSIDAD
DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

Matemáticas
Práctica 7

Recordad que al escribir la ecuación es obligatorio utilizar la expresión **'diff** (apóstrofo con diff) para referirnos a la derivada de la función, que las constantes de las que dependerán las soluciones generales aparecerán como "%c" en las ecuaciones de primer orden y como "%k1" y "%k2" en las de segundo orden.

1. Encontrar la solución general, en forma explícita, de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' + 4xy = x$	(b) $y' + 3y = e^{-3x}$	(c) $3y^2 e^{3x}(y' + y) = 1$
(d) $y' - y/x^2 = 4/x^2$	(e) $xy' + ay + x^{n+1} = 0$	(f) $y' + ax^n y = bx^n$
(g) $xy' + y = \frac{1}{2}x^4 y^2$	(h) $xy' + 2y = 2x\cos(x)$	(i) $y' + y = xy^3$

   Todas las ecuaciones de este ejercicio son lineales de primer orden: indica en cada caso cuál es la solución general de la ecuación homogénea y cuál la solución particular de la ecuación no homogénea.

2. Resolver los siguientes problemas con condiciones iniciales o de contorno:

   a) $x'' - x' - 2x = 0; \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$
   b) $x'' + 9x = 0; \quad x(0) = 2,\ x(\pi/6) = 1.$
   c) $y'' - 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 1,\ y(1) = 2e^2.$
   d) $y'' + 3y' + 5y = 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

   Nota: Para encontrar soluciones particulares de una ecuación diferencial de segundo orden se utilizan las siguientes opciones del menú "Ecuaciones": "Initial value problem (2)" para los problemas con valores iniciales y "Boundary value problem" para los problemas con valores de contorno.

3. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y'' - 9y' + 20y = (12x + 29)e^x$	(b) $y'' - y' - 2y = -3e^{-x}(3x^2 - 2x + 1)$
(c) $y'' - 2y' + 2y = e^x$	(d) $x'' + 6x' + 9x = e^{-3t} + 27t^2$

4. De todas las funciones $y = y(x)$ que satisfacen la ecuación $y'' - 6y' + 9y = 2e^{3x}$, encontrar la que tiene un punto crítico en $(0, 4)$ y determinar qué tipo de punto crítico es.

5. Para modelizar mediante ecuaciones diferenciales determinados problemas es frecuente emplear el denominado "método de las diferenciales", que consiste en que las relaciones aproximadas entre los incrementos (infinitamente pequeños) de las magnitudes que se buscan se sustituyen por las correspondientes relaciones entre sus diferenciales. Veamos un ejemplo:

Supongamos que en un depósito de 100 litros, que inicialmente contenía una disolución salina con una concentración de $2,5\,g$ de sal por litro, entra otra disolución conteniendo $2\,g$ de sal por litro a razón de 5 litros por minuto y, al mismo tiempo, sale a la misma velocidad la mezcla que se produce (que se hace homogénea por el movimiento). Si se quiere encontrar un función que exprese la cantidad de sal que hay en cada instante en el depósito podemos modelizar el problema en una ecuación diferencial y resolver dicha ecuación.

Si denotamos por $x(t)$ la cantidad de sal, expresada en gramos, tras t minutos, en la variación de esta función intervienen dos factores: la disolución de $2\,g$ por litro que entra en el depósito a razón de 5 litros por minuto y la pérdida por la mezcla que sale también a razón de 5 litros por minuto.

Teniendo en cuenta que el volumen permanece constante en 100 litros, se tiene que el incremento de la función $x(t)$, Δx, para un incremento de tiempo Δt será:

$$\Delta x = (2 \cdot 5) \cdot \Delta t - 5 \cdot \frac{x(t)}{100} \cdot \Delta t = \left(10 - 5 \cdot \frac{x(t)}{100}\right) \cdot \Delta t$$

que da lugar a la ecuación diferencial $x'(t) = 10 - 5 \cdot \frac{x(t)}{100}$, cuya solución particular para las condiciones iniciales indicadas en el problema será la función buscada.

Encontrar tal función y calcular la sal que contendrá el depósito después de 30 minutos. Determinar, si existe, la tendencia a largo plazo.

6. En un depósito hay $100\,l$ de una disolución acuosa que contiene $10\,kg$ de sal. En este depósito está entrando agua a razón de 3 litros por minuto y, al mismo tiempo, se expulsa la mezcla a razón de 2 litros por minuto. Si se mantiene la mezcla homogénea removiendo el agua, modelizar el problema mediante una ecuación diferencial y resolverla para encontrar una función que exprese la cantidad de sal que hay en el depósito en cada instante y cuánta sal quedará después de transcurrida una hora.

7. El fondo de un depósito que contiene 300 litros de agua está cubierto por una gran cantidad de sal. Suponiendo que la velocidad con que se disuelve la sal es proporcional a la diferencia entre la concentración de la disolución saturada (que es de $1\,kg$ de sal para 3 litros de agua) y la concentración en el instante dado y que, además, 300 litros de agua pura disuelven $1/3\,kg$ de sal en un minuto, hallar qué cantidad de sal estará disuelta al cabo de una hora.

8. Supongamos que la presencia de toxinas en un determinado medio destruye un cultivo de bacterias de forma proporcional en cada instante al número de bacterias y a la cantidad de toxinas presentes en el cultivo y, también, que si no hubiera toxinas las bacterias crecerían con una velocidad proporcional a la cantidad de bacterias existentes. Si, además, sabemos que la cantidad de toxinas crece con velocidad constante y que la producción de toxinas empieza en el instante $t = 0$. Establecer una ecuación diferencial que satisfaga la función $x(t)$ que da el número de bacterias vivas en el instante t y resolverla para encontrar dicha función. ¿Cómo se comporta esa función a largo plazo?

   Si en el instante $t = 0$ había 100 bacterias y todos los factores de proporcionalidad son iguales a $1/2$ ¿Cuál es el número máximo de bacterias vivas simultáneamente y cuándo se produce?