B

Construcción de los números reales.

En el conjunto $\mathcal{C}$ de las sucesiones de Cauchy de números racionales definimos la relación siguiente: si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones de $\mathcal{C}$ entonces

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \text{si} \quad \lim_n (x_n - y_n) = 0.$$

Esta relación es de equivalencia. En efecto, claramente es reflexiva y simétrica. También es transitiva pues si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty} \sim (z_n)_{n=1}^{\infty}$ tenemos

$$\lim_n (x_n - y_n) = \lim_n (y_n - z_n) = 0,$$

y aplicando propiedades conocidas de las sucesiones:

$$\lim_n (x_n - z_n) = \lim_n (x_n - y_n + y_n - z_n) = \lim_n (x_n - y_n) + \lim_m (y_n - z_n) = 0,$$

lo que implica que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (z_n)_{n=1}^{\infty}$.

El conjunto cociente $\mathcal{C}/\sim$ será denotado por $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$ es una clase de equivalencia y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es un representante de dicha clase, escribiremos $x = [x_n]$.

Vamos a ver que $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado, arquimediano y completo. En primer lugar establezcamos un resultado “técnico” que utilizaremos más adelante.

Lema B.0.12. *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy de números racionales que no converge a 0 entonces existe un racional $\varepsilon_0 > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se cumple que $|x_n| > \varepsilon_0$.*

DEMOSTRACIÓN. -

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no converge a 0, existe un número racional $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se puede encontrar un número $m \geq n$ tal que $|x_m| > 2\varepsilon_0$. Por otra parte, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, luego para dicho ε_0 existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ se tiene $|x_n - x_m| < \varepsilon_0$, es decir

$$x_m - \varepsilon_0 < x_n < x_m + \varepsilon_0.$$

Tomemos $m \geq n_0$ de tal modo que $|x_m| > 2\varepsilon_0$, lo cual implica que o bien $x_m > 2\varepsilon_0$, o bien $x_m < -2\varepsilon_0$. Si $n \geq n_0$ y se da la primera posibilidad, tenemos

$$\varepsilon_0 = 2\varepsilon_0 - \varepsilon_0 < x_m - \varepsilon_0 < x_n;$$

por el contrario, si ocurre lo segundo, nos queda

$$x_n < x_m + \varepsilon_0 < -2\varepsilon_0 + \varepsilon_0 = -\varepsilon_0,$$

y de las dos últimas desigualdades se deduce que $|x_m| > \varepsilon_0$. $\square$

Suma y producto

Dados dos elementos $x = [x_n], y = [y_n] \in \mathbb{R}$, definimos las siguientes operaciones:

· **Suma:** $x + y = [x_n + y_n]$

· **Producto:** $xy = [x_n y_n]$

Veamos que las definiciones son consistentes. En efecto, si $[x'_n]$ e $[y'_n]$ son otros representantes de x e y respectivamente, comprobemos que $[x'_n + y'_n]$ define la misma clase de equivalencia que $[x_n + y_n]$. Como $[x_n] = [x'_n]$ e $[y_n] = [y'_n]$ se cumple

$$\lim_n (x_n - x'_n) = \lim_n (y_n - y'_n) = 0,$$

luego

$$\lim_n (x_n + y_n - (x'_n + y'_n)) = \lim_n (x_n - x'_n) + \lim_n (y_n - y'_n) = 0,$$

lo que implica que $x + y = [x_n + y_n] = [x'_n + y'_n]$.

De forma similar para el producto podemos poner

$$x_n y_n - x'_n y'_n = x_n y_n - x_n y'_n + x'_n y_n - x'_n y'_n = x_n(y_n - y'_n) + x'_n(y_n - y'_n)$$

y como toda sucesión de Cauchy es acotada y el producto de una sucesión convergente a 0 por otra acotada, converge a 0, tenemos que $\lim_n (x_n y_n - x'_n y'_n) = 0$, con lo que $xy = [x_n y_n] = [x'_n y'_n]$.

Proposición B.0.13. *$\mathbb{R}$ con las operaciones suma y producto es un cuerpo.*

DEMOSTRACIÓN. -

Es fácil comprobar que $\mathbb{R}$ con la suma es un grupo abeliano aditivo cuyo elemento neutro es $0 = [0]$, la clase de equivalencia de la sucesión constante con todos sus términos iguales a 0. Tampoco ofrece dificultad probar que $\mathbb{R}$ con el producto es un grupo abeliano multiplicativo cuyo elemento neutro es $1 = [1]$, la clase de equivalencia de la sucesión constante cuyos términos son iguales a 1. Sólo veremos que todo elemento $x \in \mathbb{R}$ distinto de 0, tiene un inverso que denotaremos por x^{-1}. Si $x = [x_n]$ la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y no converge a 0; según el Lema B.0.12 existe un número racional $\varepsilon_0 > 0$ y un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq n_0$, entonces $|x_n| > \varepsilon_0$, es decir, $x_n \neq 0$, de tal modo que para todo $n \geq n_0$ existe $x_n^{-1} = 1/x_n$. Definimos entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}y$ como

$$y_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < n_0 \\ x_n^{-1} = \dfrac{1}{x_n} & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

Esta sucesión verifica:

(A) $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy.*
En efecto, dado un número racional $\varepsilon > 0$, por ser $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy, existe $m_0 \in \mathbb{N}$, que podemos tomar $m_0 \geq n_0$, tal que $|x_p - x_q| < \varepsilon_0^2\varepsilon$ si $p, q \geq m_0$; por tanto, podemos escribir

$$|y_p - y_q| = \left|\frac{1}{x_p} - \frac{1}{y_q}\right| = \frac{|x_p - x_q|}{|x_p||x_q|} < \frac{|x_p - x_q|}{\varepsilon_0^2} < \frac{\varepsilon_0^2\varepsilon}{\varepsilon_0^2} = \varepsilon.$$

(B) $[y_n]$ *es el inverso de* $[x_n]$.
Para probar que $[x_n y_n] = [1]$ vamos a demostrar que $\lim_n(x_n y_n - 1) = 0$. Si $n \geq n_0$ tenemos que $x_n y_n - 1 = x_n x_n^{-1} - 1 = 0$, es decir, $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión constante 1 a partir del término n_0.

El resto de propiedades de cuerpo son de comprobación inmediata. □

Diremos que un elemento $x = [x_n] \in \mathbb{R}$ es positivo si existe un racional $\varepsilon_0 > 0$ y un número $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq n_0$ se verifica $x_n > \varepsilon_0$; en este caso escribiremos $x > 0$. Esta definición no depende del representante elegido; en efecto, si $[x'_n] = x$ es otro representante de x y consideramos $\varepsilon_0 > 0$, existe m_0, que podemos tomar $m_0 > n_0$, tal que si $n > m_0$ entonces $|x_n - x'_n| < \varepsilon_0/2$, de donde se deduce que

$$x'_n = x_n - (x_n - x'_n) > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0,$$

con lo que queda clara la independencia del representante elegido.

Proposición B.0.14. *$\mathbb{R}$ es un cuerpo totalmente ordenado.*

DEMOSTRACIÓN. -

Dados $x, y \in \mathbb{R}$, definimos la siguiente relación:

$$x \leq y \quad \text{si, y sólo si,} \quad x - y \geq 0,$$

entendiendo que "$x - y \geq 0$" si $x - y$ es positivo o 0.

Veamos que es una relación de orden total. En primer lugar, es claramente reflexiva. En cuanto a la antisimetría, si $x \leq y$ e $y \leq x$, podemos suponer que $x - y > 0$, pues si $x - y = 0$, entonces $x = y$ (por ser $\mathbb{R}$ un cuerpo) y no habría nada que probar. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ y n_0 tales que si $n \geq n_0$, se tiene que $x_n - y_n > \varepsilon_0$. Análogamente, si suponemos $y - x > 0$, existe $\varepsilon'_0 > 0$ racional y n'_0 tales que si $n \geq n'_0$ se tiene que $y_n - x_n > \varepsilon'_0$. Si tomamos $\varepsilon''_0 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon'_0\}$ y $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$, se verifican ambas desigualdades a la vez, es decir

$$x_n - y_n > \varepsilon''_0 \quad \text{e} \quad y_n - x_n > \varepsilon''_0,$$

y la segunda desigualdad es equivalente a $x_n - y_n < -\varepsilon''_0$, lo cual es una contradicción, con lo que tendremos $x = y$.

También satisface la propiedad transitiva; supongamos $x \leq y$ e $y \leq z$. Si $x = y$ no hay nada que probar y lo mismo sucede si $y = z$, de modo que supongamos que $y - x > 0$ y que $z - y > 0$. Entonces

$$\text{existen } \varepsilon_0 > 0 \text{ racional y } n_0 \text{ tales que } n \geq n_0 \text{ implica } y_n - x_n > \varepsilon_0 \quad \text{y}$$

$$\text{existen } \varepsilon'_0 > 0 \text{ racional y } n'_0 \text{ tales que } n \geq n'_0 \text{ implica } z_n - y_n > \varepsilon'_0;$$

si, como en el caso anterior tomamos $\varepsilon''_0/2 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon'_0\}$ y $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$ se verifican ambas desigualdades a la vez y tendremos

$$z_n - x_n = z_n - y_n + y_n - x_n > \frac{\varepsilon''_0}{2} + \frac{\varepsilon''_0}{2} = \varepsilon''_0,$$

con lo que $z - y > 0$ y por tanto $x \leq z$.

Sólo nos resta demostrar que el orden es total, es decir, que si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces bien $x \leq y$, bien $y \leq x$. Si uno de ellos es 0 o son iguales, no hay nada que probar. Supongamos entonces que x e y son distintos y ninguno de ellos es 0. Si $x = [x_n]$ e $y = [y_n]$, se tiene que $[y_n - x_n] \neq [0]$ y $(x_n - y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy que no converge a 0. Por el Lema B.0.12 se tiene que bien $x \leq y$, bien $y \leq x$. Con lo que termina la demostración de la proposición. □

Proposición B.0.15. *El cuerpo ordenado $\mathbb{Q}$ de los números racionales es isomorfo a un subcuerpo de $\mathbb{R}$. Es decir, existe un subcuerpo $R \subset \mathbb{R}$ y una aplicación $f : \mathbb{Q} \longrightarrow R$ que verifica:*

(a) *f es biyectiva.*

(b) $f(p+q) = f(p) + f(q)$ *para todo* $p, q \in \mathbb{Q}$.

(b) $f(pq) = f(p)f(q)$ *para todo* $p, q \in \mathbb{Q}$.

(d) *Si $p \leq q$, entonces $f(q) \leq f(q)$.*

DEMOSTRACIÓN. -

Si tomamos R el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por los elementos que tienen por representantes a sucesiones constantes, es fácil ver que es un subcuerpo. De modo que definimos $f : \mathbb{Q} \longrightarrow R$ como $f(p) = (p)$ la sucesión constante p; es inmediato probar que f es biyectiva. La demostración del resto de propiedades se reduce a una mera comprobación. Veamos, por ejemplo, la propiedad (d). Si $p \leq q$ tenemos que bien $p = q$, y no hay nada que probar, bien $q - p$ es positivo; en este caso, las sucesión constante $f(q) - f(p)$ también es positiva, lo que implica que $f(p) \leq f(q)$. □

A partir de aquí podemos identificar $\mathbb{Q}$ con el subcuerpo R. También podemos definir el valor absoluto como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se comprueban, también fácilmente, las propiedades conocidas del valor absoluto y que $(\mathbb{R}, |\ |)$ es un espacio métrico. Antes de demostrar que se trata de un espacio métrico completo, veamos dos resultados interesantes.

Proposición B.0.16. *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ de manera que $x < q < y$.*

DEMOSTRACIÓN. -

Sean $x = [x_n]$ e $y = [y_n]$. Como $x < y$, existen un racional $\varepsilon > 0$ y un natural n_0 tales que si $n \geq n_0$ se cumple que $y_n - x_n > \varepsilon$.

Por otra parte, las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son de Cauchy, por lo que existe $m_0 \geq n_0$ (que podemos tomar el mismo para las dos), tal que si $m, n \geq m_0$, se cumplen las desigualdades:

$$|x_n - x_{m_0}| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad |y_n - y_{m_0}| < \frac{\varepsilon}{4},$$

que es equivalente a

$$x_{m_0} - \frac{\varepsilon}{4} < x_n < x_{m_0} + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{y} \quad y_{m_0} - \frac{\varepsilon}{4} < y_n < y_{m_0} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Tomemos $q = \frac{1}{2}x_{m_0} + y_{m_0}$ y veamos que este racional verifica la tesis del teorema. Si $n \geq m_0$ se verifica

$$q - x_n = \frac{1}{2}x_{m_0} + y_{m_0} - x_n > \frac{1}{2}x_{m_0} + y_{m_0} - x_{m_0} - \frac{\varepsilon}{4}$$
$$= \frac{1}{2}(y_{m_0} - x_{m_0}) - \frac{\varepsilon}{4} > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{4},$$

lo que significa que $[x_n] < [q]$. De forma análoga se comprueba que si $n \geq m_0$ entonces $y_n - q > \varepsilon/4$, con lo que $[q] < [y_n]$. □

Proposición B.0.17. *Se verifican:*

(a) *Toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy en $\mathbb{Q}$ es convergente en $\mathbb{R}$ y su límite es precisamente $x = [x_n]$, es decir, la clase de equivalencia determinada por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

(b) *$\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. -

(a) Tenemos que demostrar que para todo número real $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $|x_n - x| < \varepsilon$.

Según la Proposición B.0.16, existe un racional $\varepsilon' > 0$ cumpliendo $0 < 2\varepsilon' < \varepsilon$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{Q}$, existe n_0 tal que si $m, n \geq n_0$ se cumple $|x_n - x_m| < \varepsilon'$, lo que es equivalente a que $-\varepsilon' < x_n - x_m < \varepsilon$ para todo $n, m \geq n_0$. Tomemos $k \geq n_0$ fijo. Entonces si $m \geq n_0$ podemos escribir

$$2\varepsilon' - (x_k - x_m) > 2\varepsilon' - \varepsilon' = \varepsilon',$$

lo que significa que los números reales $[x_k - x_m] = [x_k] - [x_m]$ y $[2\varepsilon']$ cumplen $[x_k - x_m] = [x_k] - [x_m] < [2\varepsilon']$ (se entiende que, al haber fijado k, (x_k) representa la sucesión constante con todos sus términos iguales a x_k y $[x_m]$ es la clase de equivalencia de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, ya que (x_m) representa la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ a partir del término n_0). Por tanto, $[x_k - x_m] = [x_k] - [x_m]$ es un representante del número real $x_k - x$, y así tenemos $x_k - x < 2\varepsilon'$. Teniendo en cuenta que esto se puede hacer para todo $k \geq n_0$ concluimos que

$$x_n - x < 2\varepsilon' < \varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq n_0.$$

De nuevo fijando $k \geq n_0$ y tomando $m \geq n_0$ obtenemos que

$$2\varepsilon' - (x_m - x_k) > 2\varepsilon' - \varepsilon' = \varepsilon',$$

y con un razonamiento similar al anterior se concluye que

$$x - x_n < 2\varepsilon' < \varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

lo que significa que

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0,$$

y concluye la demostración.

(b) Según el apartado (a) anterior, para todo $x = [x_n] \in \mathbb{R}$, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{Q}$ y converge a x, con lo que tenemos que x es un punto adherente a $\mathbb{Q}$. Por tanto, $\mathbb{Q}$ es denso ($\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$). □

Teorema B.0.18. $(\mathbb{R}, |\ |)$ *es un espacio métrico completo.*

DEMOSTRACIÓN. -

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. Entonces para todo real $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que si $n, m \geq n_0$ se tiene que $|x_n - x_m| < \varepsilon/3$. Observemos que podemos tomar $n_0 > 3/\varepsilon$ para que se cumpla $1/n < \varepsilon/3$ y $1/m < \varepsilon/3$.

Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $x_n < x_n + 1/n$ de modo que, según la Proposición B.0.16, existe un racional q_n tal que $x_n < q_n < x_n + 1/n$, con lo que tenemos definida una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} q$ que es de Cauchy en $\mathbb{Q}$. En efecto, si $n, m \geq n_0$ tenemos

$$|q_n - q_m| \leq |q_n - x_m| + |x_m - x_n| + |x_n - q_n| < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Entonces la Proposición B.0.17 asegura que $(x_n)_{n=1}^{\infty} q$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ que converge a $x = [q_n]$. Vamos a probar que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también tiene por límite a x. Como $\lim_n q_n = x$, para todo $\varepsilon' > 0$ real existe m_0 (de nuevo lo podemos tomar $m_0 > 2/\varepsilon'$) tal que si $n > m_0$ se cumple que $|q_n - x| < \varepsilon'/2$. Entonces tomando $n > m_0$ podemos poner

$$|x_n - x| \leq |x_n - q_n| + |q_n - x| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon'}{2} < \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon',$$

y, por tanto, $\lim_n x_n = x$. □