1

Espacios métricos

En este primer capítulo, se introduce la noción de Espacio métrico y de subespacio métrico, estudiando numerosos ejemplos y propiedades básicas. Se introduce la noción de topología asociada a un espacio métrico introduciendo las bolas abiertas y a a partir de aquí se estudian los conjuntos abiertos, los cerrados y sus propiedades. Se pretenden alcanzar las siguientes competencias específicas:

- Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de espacio métrico.
- Reconocer y utilizar las propiedades sencillas de la topología métrica.
- Construir ejemplos de espacios métricos usando las nociones de subespacio métrico y espacio métrico producto.

Se desarrollarán los contenidos siguientes:

- Distancia. Espacio métrico. Distancias en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.
- Ejemplos de espacios métricos.
- Subespacio métrico.
- Distancia a un conjunto y distancia entre conjuntos.
- Bolas. Topología asociada a una métrica.
- Conjuntos abiertos y cerrados. Propiedades.
- Producto de espacios métricos.

1.1. Distancias

Definición 1.1.1. *Dado un conjunto X, una **distancia** sobre X, es una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada par de puntos $x, y \in X$ le asocia un número real $d(x, y)$, que cumple las siguientes condiciones:*

(1) $d(x, y) \geq 0$.

(2) $d(x, y) = 0$ *si, y sólo si,* $x = y$ *(separación).*

(3) $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in X$ *(simetría).*

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *para todo* $x, y, z \in X$ *(desigualdad triangular).*

Definición 1.1.2. *Un **espacio métrico** es un par (X, d), donde X es un conjunto y d es una distancia definida en X.*

Ejemplos

Ej.1.1. En el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ podemos definir una distancia tomando el valor absoluto de la diferencia, es decir, $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $d(x, y) = |x - y|$. Las condiciones de distancia se deducen inmediatamente de las propiedades conocidas del valor absoluto. A esta distancia le llamaremos ***distancia usual*** de $\mathbb{R}$.

Ej.1.2. El ***espacio métrico discreto***. Sea X un conjunto no vacío cualquiera; definimos una distancia d_D como sigue:

$$d_D(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

Esta distancia se llama ***distancia discreta*** y verificar las condiciones de distancia se reduce a una mera comprobación. Observemos además que cambiando el 1 por cualquier otro valor numérico obtenemos otra distancia, también discreta.

Las dos siguientes desigualdades, serán útiles en el desarrollo de los dos próximos ejemplos que juegan un importante papel.

Lema 1.1.3. *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son números reales cualesquiera, entonces, se cumplen:*

(a) (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right).$$

(b) (Desigualdad de Minkowski)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos en primer lugar la desigualdad (a) de Cauchy-Schwarz. Dado cualquier número $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2 \geq 0$. Si desarrollamos el cuadrado y agrupamos tendremos que $Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$, tomando $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ y $C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

En estos términos, lo que queremos probar es que $B^2 \leq AC$. Si $A = 0$ entonces $a_i = 0$ para todo i la desigualdad se verifica claramente. Si $A \neq 0$ podemos poner

$$0 \leq Ax^2 + 2Bx + C = A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. La última expresión es mínima si $x = -\frac{B}{A}$ y si sustituimos dicha expresión obtenemos

$$0 \leq \frac{AC - B^2}{A}, \quad \text{lo cual implica} \quad AC - B^2 \geq 0$$

y, por tanto, $B^2 \leq AC$; con lo que queda demostrada la desigualdad.

Por último, observemos que demostrar la desigualdad de Minkowski, es equivalente a demostrar la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

Si desarrollamos el binomio de la izquierda

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i r$$

Con lo cual, sólo queda simplificar y aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz (1.1.3)(a) anterior. □

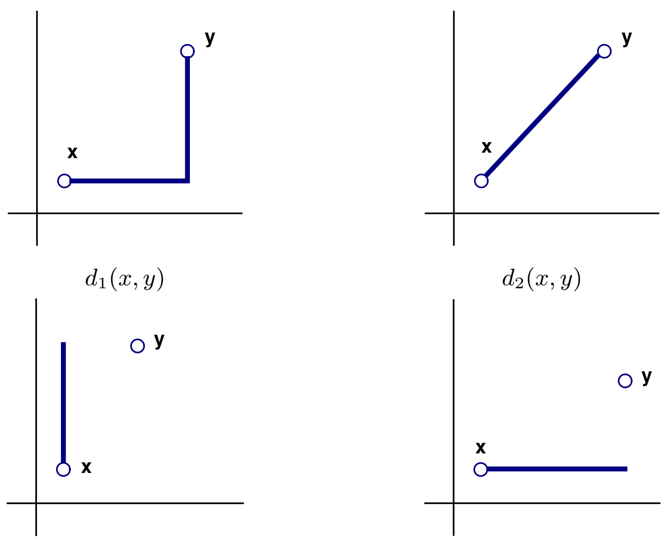
Sigamos con más ejemplos de distancias y, por tanto de espacios métricos.

Ejemplos

Ej.1.3. Sea $X = \mathbb{R}^2$. Para los puntos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ se definen las aplicaciones:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \\ d_2(x,y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \\ d_\infty(x,y) &= \text{máx}(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|). \end{aligned}$$

Las tres aplicaciones son distancias en el plano (una demostración de esto la proporcionaremos en el siguiente ejemplo). Las funciones anteriores miden la distancia de una forma distinta, y en la siguiente Figura 1.1 se puede ver una representación gráfica de cada una ellas:



$d_1(x,y)$ $\quad$ $d_2(x,y)$

$d_\infty(x,y)$ con $|x_2-y_2|>|x_1-y_1|$ $\quad$ $d_\infty(x,y)$ con $|x_1-y_1|>|x_2-y_2|$

Figura 1.1 – Gráficos de d_1, d_2 y d_∞.

Las tres distancias son generalizaciones de la distancia usual que hemos definido en $\mathbb{R}$ y las tres tienen nombre propio: d_1 se llama la ***distancia del taxi***, d_2 se llama la ***distancia euclídea*** o usual y d_∞ se llama la ***distancia del ajedrez*** o del máximo.

Ej.1.4. El Ejemplo **Ej.1.3.** anterior se puede generalizar fácilmente a $\mathbb{R}^n$ como sigue. Sean los puntos $x=(x_1,\dots,x_n)$ e $y=(y_1,\dots,y_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Se definen:

$$\begin{aligned}
d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^n |x_i-y_i|,\\
d_2(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2\right)^{1/2},\\
d_\infty(x,y) &= \text{máx}\{|x_i-y_i|; i=1,\dots,n\}.
\end{aligned}$$

La prueba de que d_1 y d_∞ son distancias es una mera comprobación. En efecto, tal y como se han definido, las dos son no negativas; además como $|x_i-y_i|=0$ y $(x_i-y_i)^2=0$ si, y sólo si, $x_i=y_i$ se cumple la condición

(2) de distancia. Además $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$ y $(x_i - y_i)^2 = (y_i - x_i)^2$, con lo que obtenemos la condición (3). Para la desigualdad triangular sólo hay que tener en cuenta la desigualdad triangular del valor absoluto para cada i

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|,$$

con lo que en el caso d_1 tenemos:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d_1(x,z) + d_1(z,y);$$

y para d_∞:

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \text{máx}\{|x_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\} \\ &\leq \text{máx}\{|x_i - z_i| + |z_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\} \leq \\ &\leq \text{máx}\{|x_i - z_i| : i = 1, \ldots, n\} + \text{máx}\{|z_i - y_i| : i = 1, \ldots, n\} \\ &= d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Lo mismo sucede con las propiedades (1), (2) y (3) para la distancia usual d_2; no así con la propiedad (4) en la que hay que utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz 1.1.3(a).

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y consideremos

$$(d_2(x,z) + d_2(z,y))^2 = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = (*)$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz 1.1.3(a) al último sumando de la expresión anterior:

$$(*) \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 + \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)(z_i - y_i) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - z_i)^2 + (z_i - y_i)^2 + 2(x_i - z_i)(z_i - y_i) \right] =$$

$$\sum_{i=1}^{n}[(x_i - z_i) + (z_i - y_i)]^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 =$$

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2}\right]^2 = (d_2(x,y))^2,$$

de donde se deduce la desigualdad triangular.

Ej.1.5. El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos es un espacio métrico con la distancia dada por el módulo de la diferencia:

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \quad \text{con} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Compruebe como ejercicio, que se verifican las condiciones de distancia.

Ej.1.6. Se pueden considerar otros conjuntos que no son numéricos, como el conjunto de las funciones reales acotadas

$$X = \mathcal{A}([a,b], \mathbb{R}) = \ell^{\infty}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : |f(x)| \leq M, \ M > 0\}.$$

Dadas dos funciones $f, g \in X$ definimos

$$d_{\infty}(f,g) = \sup_{x \in [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\}.$$

Puede comprobar, a partir de las propiedades del valor absoluto, que d_{∞} es una distancia, denominada la ***distancia del supremo***; en la Figura 1.2 se representa la distancia del supremo entre dos funciones f y g.

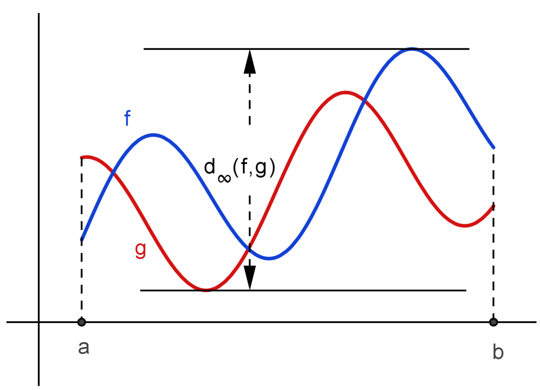


Figura 1.2 – Distancia del supremo en el espacio $\mathcal{A}([a,b], \mathbb{R})$.

Ej.1.7. También podemos considerar el conjunto $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, de las funciones reales continuas sobre un intervalo cerrado $[a,b]$. La aplicación d dada por

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

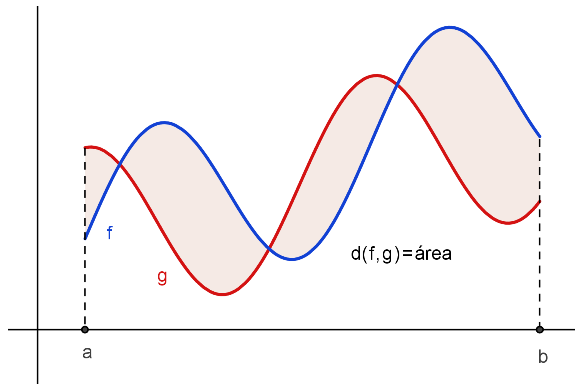


Figura 1.3 – La distancia es el área comprendida entre dos curvas.

es una distancia, que viene dada por el área comprendida entre funciones continuas. En la Figura 1.3 se representa tal distancia. Sabemos que si $f(x) \geq 0$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ para cada $x \in [a,b]$ y también que $\int_a^b f(x)dx = 0$ si, y sólo si, $f \equiv 0$; por tanto se cumplen las dos primeras condiciones de distancia.

De la simetría del valor absoluto ($|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$), se obtiene la tercera condición; y por último, de la desigualdad triangular del valor absoluto, de la aditividad de la integral y de que $f(x) \leq g(x)$ implica $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$, se deduce

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \leq \int_a^b (|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|)dx$$

$$= \int_a^b |f(x) - h(x)|dx + \int_a^b |h(x) - g(x)|dx = d(f,h) + d(h,g).$$

Ej.1.8. O bien el conjunto de las sucesiones reales acotadas

$$\begin{aligned} \ell^\infty =& \{(x_n)_{n=1}^\infty : \text{ sucesión acotada con } x_n \in \mathbb{R}\} \\ =& \{x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} : \ x \text{ está acotada}\} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dadas dos sucesiones $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$, definamos

$$d_\infty((x_n)_n, (y_n)_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n - y_n|\}.$$

Pruebe que d_∞ es una distancia en ℓ^∞.

Ej.1.9. También se pueden construir espacios métricos a partir de otros conocidos. En efecto, sean (X_1, d) y (X_2, d') dos espacios métricos. Para puntos

$x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de $X_1 \times X_2$ se define:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= d(x_1,y_1) + d'(x_2,y_2), \\ d_2(x,y) &= (d(x_1,y_1)^2 + d'(x_2,y_2)^2)^{1/2}, \\ d_\infty(x,y) &= \text{máx}\{d(x_1,y_1), d'(x_2,y_2)\}. \end{aligned}$$

Entonces d_1, d_2 y d_∞ son distancias en el espacio producto $X_1 \times X_2$.

Verificar que d_1, d_2 o d_∞ son distancias es un proceso similar al del Ejemplo **Ej.1.3.** anterior y es recomendable que, como ejercicio, concrete los detalles.

Este es un procedimiento, digamos estandar, para definir distancias en espacios que son el producto cartesiano de una colección finita de espacios métricos. Así, si $(X_1, d_1) \dots (X_n, d_n)$ son n espacios métricos, se pueden definir en $X_1 \times \cdots \times X_n$ las distancias:

$$\begin{aligned} \rho_1(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i), \\ \rho_2(x,y) &= \left(\sum_{i=1}^{n} d_i(x_1,y_1)^2 \right)^{1/2}, \\ \rho_\infty(x,y) &= \text{máx}\{d_i(x_i,y_i) : i = 1,\dots,n\}, \end{aligned}$$

con $x = (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$.

La siguiente, es una propiedad que nos será útil, junto con el resultado que aparece en el Problema **P.1.2**.

Proposición 1.1.4. *Sea (X,d) un espacio métrico. Para todo $x,y,z \in X$ se verifica:*

$$|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y).$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la desigualdad triangular y la simetría de la distancia, tenemos

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = d(x,y) + d(z,y),$$

por lo que $d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y)$.

De forma análoga podemos poner $d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y) = d(x,z) + d(x,y)$ y tendremos que $-d(x,y) \leq d(x,z) - d(z,y)$.

Usando estas dos desigualdades tenemos

$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(z,y) \leq d(x,y)$$

lo que concluye la demostración. □

Estamos en condiciones de practicar y profundizar un poco por cuenta propia. De modo que puede trabajar con los ejercicios y problemas siguientes.

Ejercicios y Problemas

P.1.1 Sea $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(m,n) = |m^2 - n^2|$. ¿Es $(\mathbb{N}, d)$ un espacio métrico? Justifique la respuesta. [I]

P.1.2 Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que se cumple

$$|d(x,y) - d(z,t)| \leq d(x,z) + d(y,t)$$

para todo $x, y, z, t \in X$. [I] [R]

P.1.3 Sea X un conjunto. Demuestre que una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una distancia si, y sólo si, para $x, y, z \in X$, se verifican

(a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$. [I]

P.1.4 Sea (X, d) un espacio métrico. Se definen δ, y ρ y η como sigue:

$$\begin{aligned}
\delta(x,y) &= kd(x,y), \qquad k \in \mathbb{R}^+ \\
\rho(x,y) &= \text{mín}\{1, d(x,y)\} \\
\eta(x,y) &= [d(x,y)]^2
\end{aligned}$$

Demuestre que δ y ρ son distancias sobre X, pero que η no tiene por qué ser necesariamente una distancia. [I]

P.1.5 Sea X un conjunto y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación inyectiva. Demuestre que la aplicación $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia sobre X. [I]

P.1.6 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente. Demuestre que $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia sobre $\mathbb{R}$. [I] [R]

P.1.7 Considere el conjunto $\mathcal{C}([0,1])$ de las funciones reales continuas en el intervalo $[0,1]$. Sean $f(x) = x(1-x)$ y $g(x) = x$. Calcule $d_\infty(f,g)$ y $d(f,g)$ según las definiciones de los Ejemplos **Ej.1.6.** y **Ej.1.7.**. [I]

1.1.1. Subespacio métrico

El siguiente resultado nos permite definir un subespacio métrico, simplemente como un subconjunto $A \subset X$ y la distancia d restringida a A.

Proposición 1.1.5. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$ un subconjunto de X. Sea la función $d_A : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_A(x, y) = d(x, y)$, para cada $x, y \in A$. Entonces d_A es una distancia sobre A, que se denomina **distancia inducida** por d. El par (A, d_A) se dice que es un **subespacio métrico** de X.*

La demostración se reduce a una mera comprobación que puede realizar, sin dificultad, como ejercicio.

Está claro que cualquier subespacio métrico, considerado de forma aislada es un espacio métrico y, por supuesto, todo espacio métrico es un subespacio de sí mismo. Esta es una nueva forma de construir nuevos espacios métricos, a partir de otros conocidos.

Señalaremos que, si $A \subset \mathbb{R}^n$, cuando se hable de A como de un espacio métrico, supondremos que su distancia es la distancia inducida por la distancia euclídea de $\mathbb{R}^n$, salvo que se diga lo contrario.

Veamos algunos ejemplos de subespacios para afianzar este concepto.

Ejemplos

Ej.1.10. $[0, 1]$ con la distancia inducida por el valor absoluto es un subespacio métrico de $\mathbb{R}$.

Ej.1.11. El conjunto $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ de las funciones reales continuas en $[a, b]$, con la distancia inducida por d_∞, es subespacio métrico del conjunto $\mathcal{A}([a, b], \mathbb{R})$ de las funciones acotadas en dicho intervalo.

Ej.1.12. El espacio c_o de las sucesiones reales con límite 0 es un subespacio métrico del espacio de las sucesiones acotadas ℓ^∞, con la distancia del supremo.

Ej.1.13. Veamos las distancias que se inducen en algunos conjuntos. Podemos identificar desde el punto de vista conjuntista, la recta real $\mathbb{R}$ y el subconjunto de $\mathbb{R}^2$, definido como $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, mediante la aplicación $x \mapsto (x, 0)$. Es evidente que se trata de una biyección ¿verdad?. Nos podemos plantear la cuestión siguiente. ¿Qué relación hay entre la distancia euclídea, d_2 y la distancia del valor absoluto en $\mathbb{R}$?; veámoslo.

Si calculamos la distancia entre dos puntos de $(x, 0), (y, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$, tenemos

$$d_2((x, 0), (y, 0)) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y| = d(x, y), \tag{1.3}$$

y esta última es la distancia usual de $\mathbb{R}$. Esto significa que, en cierto modo podemos considerar la recta real como un subespacio métrico del plano $\mathbb{R}^2$.

Observe que ocurre lo mismo con las distancias d_1 y d_∞; compruébelo tal y como se le sugiere en el Problema **P.1.8**.

Podemos practicar un poco más, de nuevo por nuestra cuenta.

Ejercicios y Problemas

P.1.8 Estudie las distancias que, sobre $\mathbb{R}$, inducen d_1 y d_∞ consideradas sobre $\mathbb{R}^2$. ¿Y si considera las distancias d_1, d_2 y d_∞ sobre $\mathbb{R}^n$ e intenta calcular las que inducen, respectivamente, sobre $\mathbb{R}^{n-k}$, con $1 < k < n$?

P.1.9 Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ definido como $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \;\; y = x^2\}$. Calcule explícitamente las distancias inducidas sobre A por d_1, d_2 y d_∞.

1.2. Distancia a un conjunto

Nos planteamos ahora la posibilidad de medir distancias entre un punto y un conjunto, o entre dos conjuntos, a partir de la distancia definida en un espacio métrico. Parece que de forma intuitiva podríamos pensar, por ejemplo, que la distancia entre un punto y un conjunto, sería la distancia entre tal punto y el punto del conjunto más cercano a aquel. Esto no es tan sencillo como puede parecer a primera vista. Veamos en esta sección algunas de las cosas que podemos saber sobre estas ideas.

Definición 1.2.1. *Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ un subconjunto de X y x_0 un punto de X. La distancia de x_0 al subconjunto A se define como*

$$d(x_0, A) = \text{ínf}\{d(x_0, x) : \; x \in A\}.$$

Recordemos que el ínfimo de un conjunto de números reales acotado inferiormente siempre existe, de modo que la definición es buena.

Definición 1.2.2. *Sean A y B dos subconjuntos de X. La distancia del subconjunto A al subconjunto B se define como*

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(x, y) : \; x \in A, \; y \in B\}.$$

Observemos que si $a \in A$, entonces $d(a, A) = 0$ o si $A \cap B \neq \varnothing$, $d(A, B) = 0$, pero sin embargo ...

Ejemplos

Ej.1.14. Consideremos los conjuntos $A = (0,1)$ y $B = (1,2)$, en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, tenemos que

1. $d(0,A) = 0$ y, sin embargo $0 \notin A$; y
2. $d(A,B) = 0$ y $A \cap B = \varnothing$.

En efecto, el primer caso, supongamos que $d(0,A) = \varepsilon > 0$, es claro que $\varepsilon < 1$; entonces existe un número real entre 0 y ε, por ejemplo, $\varepsilon/2$, por lo que ε no sería el ínfimo.

Respecto al segundo caso, si suponemos que $d(A,B) = \varepsilon > 0$ (también ha de ser $\varepsilon < 1$), tenemos que $1 - \varepsilon/3 \in A$ y $1 + \varepsilon/3 \in B$ y

$$d(1 - \varepsilon/3, 1 + 3\varepsilon) = |1 - \varepsilon/3 - (1 + 3\varepsilon)| = 2\varepsilon/3 < \varepsilon,$$

en contra de que ε es el ínfimo.

Ej.1.15. Si d es la métrica discreta sobre X, $x \in X$ y $A, B \subset X$. Entonces si $x \in A$, $d(x,A) = 0$; por el contrario, si $x \notin A$, entonces $d(x,y) = 1$ para todo $y \in A$ y, en consecuencia, $d(x,A) = 1$. En resumen:

$$d(x,A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin A \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Veamos qué pasa con la distancia entre dos conjuntos $A, B \subset X$. Tenemos que $d(A,B) = \text{ínf}\{d(x,y) : \ x \in A, y \in B\}$; entonces si existe $x \in A \cap B$, $d(A,B) = d(x,x) = 0$; pero si $A \cap B = \varnothing$ entonces $d(x,y) = 1$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$, con lo que $d(A,B) = 1$. Por tanto:

$$d(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{si } A \cap B = \varnothing \\ 0 & \text{si } A \cap B \neq \varnothing \end{cases}$$

Ej.1.16. En $(\mathbb{R}^2, d_2)$ consideremos los subconjuntos

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y = 2\}.$$

Vamos a calcular la distancia $d(A,B)$. La Figura 1.4 siguiente ayuda a visualizar que la distancia que queremos calcular es la diferencia entre la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, que es $\sqrt{2}$, y el radio del círculo A que es 1, por tanto, la distancia buscada es $d(A,B) = \sqrt{2} - 1$.

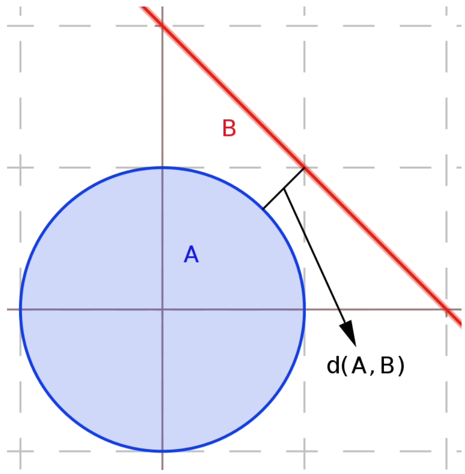


Figura 1.4 – La distancia $d(A,B)$ es $\sqrt{2}$.

Proposición 1.2.3. *Si (X,d) es un espacio métrico y dos subconjuntos $A, B \subset X$, se verifican:*

(a) $d(x,A) \leq d(x,y) + d(y,A)$*, para todo* $x, y \in X$

(b) $|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$*, para todo* $x, y \in Xy$

(c) $d(A,B) \leq d(x,A) + d(x,B)$*, para todo* $x \in X$

DEMOSTRACIÓN. Para demostrar la desigualdad *(a)*, tenemos que, si $x \in X$, para todo $a \in A$, entonces $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$; y como esto es para todo $a \in A$, la desigualdad *(a)* se cumple.

Respecto a la desigualdad *(b)*, si en la desigualdad *(a)* intercambiamos los papeles de x e y, tenemos la desigualdad $d(y,A) \leq d(x,y) + d(x,A)$ de donde se deduce que $-d(x,y) \leq d(x,A) - d(y,A)$; mientras que de la desigualdad *(a)* de forma directa, se obtiene $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$ y combinando estas dos últimas desigualdades obtenemos la buscada.

Por último, para ver la desigualdad *(c)*, si alguno de los dos conjuntos A o B es no vacío, el resultado es evidente. Supongamos, entonces que A y B son no vacíos. Sea ahora $\varepsilon > 0$, y $A \in A$ de manera que $d(x,a) \leq d(x,A) + \varepsilon/2$ y $b \in B$ tal que $d(x,b) \leq d(x,B) + \varepsilon/2$. Entonces

$$d(A,B) \leq d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) \leq d(x,A) + d(x,B) + \varepsilon,$$

como esto se puede hacer para todo $\varepsilon > 0$, deducimos la desigualdad buscada. □

Un último concepto para terminar esta sección.

Definición 1.2.4. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto acotado. El **diámetro** de A, representado por $\operatorname{diam}(A) = \delta(A)$, se define como*

$$\operatorname{diam}(A) = \delta(A) = \sup\{d(x, y) : \ x, y \in A\}.$$

Ejemplos

Ej.1.17. Los diámetros de los subconjuntos $[1, 2]$, $[1, 2)$ y $\{0\} \cup [1, 2)$ de $\mathbb{R}$ con la distancia usual son, respectivamente, 1, 1 y 2.

En efecto, en el caso de $[1, 2]$ no hay nada que probar pues 1 es precisamente, la longitud del intervalo. En el caso del intervalo $[1, 2)$, supongamos que $\delta([1, 2)) = r < 1$, entonces $1 + r \in [1, 2)$, y existe $\varepsilon > 0$ tal que $1 + r + \varepsilon \in [1, 2)$ con lo que

$$d(1, 1 + r + \varepsilon) = |1 + r + \varepsilon - 1| = r + \varepsilon > r,$$

en contra de que $\delta([1, 2)) = r$. De forma similar se prueba el último caso. Inténtelo como ejercicio.

Ej.1.18. Consideremos el subconjunto $A = [0, 1] \times [0, 1]$ de $\mathbb{R}^2$, es decir, el cuadrado unidad, y veamos su diámetro para cada una de las distancias d_1, d_2 y d_∞ (es conveniente que repase el Ejemplo **Ej.1.3.**).

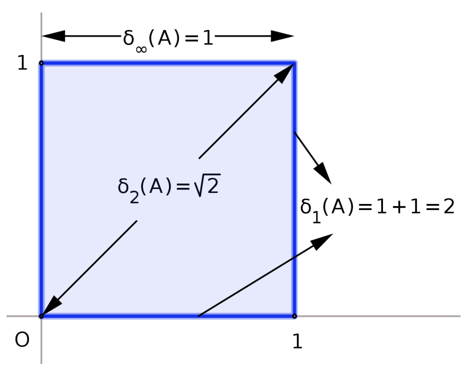


Figura 1.5 – Diámetro del cuadrado unidad para d_1, d_2 y d_∞.

En el caso de d_1 el diámetro es

$$\operatorname{diam}_1(A) = \delta_1(A) = 2,$$

pues se trata del máximo del las sumas de los valores absolutos de las diferencias entre las coordenadas, a saber, la suma de dos lados del cuadrado. En el caso d_2 es la mayor distancia entre dos puntos del cuadrado, es decir la longitud de la diagonal

$$\operatorname{diam}_2(A) = \delta_2(A) = \sqrt{2}.$$

Por último, en el caso d_∞, se trata del mayor valor absoluto de la diferencia entre coordenadas, es decir la longitud de uno de los lados

$$\operatorname{diam}_\infty(A) = \delta_\infty(A) = 1.$$

Vea para cada caso, la Figura 1.5; y además, observe que el diámetro de un conjunto, como era de esperar, depende de la distancia.

De nuevo podemos practicar de forma que profundicemos un poco.

Ejercicios y Problemas

P.1.10 Consideremos $\mathbb{R}$ con la distancia usual $d(x,y) = |x-y|$ y el conjunto $A = (1,2] \subset \mathbb{R}$. Responda las siguientes cuestiones justificando las respuestas:

1. ¿Cuánto vale $d(\frac{3}{2}, A)$? 0, $-\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{2}$.
2. ¿Cuánto vale $d(1, A)$? $\frac{1}{2}$, 0 o $\frac{1}{4}$
3. ¿Cuánto vale $d(0, A)$? 1, $\frac{1}{2}$ o 0

P.1.11 Si (X,d) es un espacio métrico y $A, B \subset X$ no vacíos, demuestre que

$$d(A,B) = \text{ínf}\{d(y,A) : y \in B\} = \text{ínf}\{d(x,B) : x \in A\}.$$

P.1.12 Considere $\mathbb{R}$ con la distancia usual y $A = \{1/n + (-1)^n : \; n \in \mathbb{N}\}$. Calcule $d(1,A)$ y $d(-1,A)$. [I]

P.1.13 Sea (X,d) un espacio métrico. En el Problema **P.1.4** hemos visto que la aplicación $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(x,y) = \text{mín}\{1, d(x,y)\}$, es una distancia. Considere el espacio $(\mathbb{R}^2, \rho)$ con $\rho(x,y) = \text{mín}\{1, d_2(x,y)\}$ y el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 1, \; 0 \leq y \leq 1\}.$$

Halle los puntos de $\mathbb{R}^2$ que verifican $d(x,A) = 1$.

P.1.14 Sea $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x + y < 1, \; x > 0, \; y > 0\}$. Calcule el diámetro de A.

1.3. Topología asociada a un espacio métrico

A continuación vamos a estudiar los subconjuntos, quizás más importantes, de un espacio métrico: las bolas. Se trata de una generalización del concepto conocido de intervalo abierto centrado en un punto de $\mathbb{R}$.

Definición 1.3.1. *Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ un punto y $r > 0$ un número real. La **bola abierta** en X con **centro** en a y de **radio** r es el conjunto*

$$B(a, r) = \{x \in X : \ d(x, a) < r\}.$$

Al conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in X : \ d(x, a) \leq r\},$$

*se le llama **bola cerrada**. Si se necesita especificar con qué distancia se está trabajando, se representará por $B_d(a, r)$.*

Las bolas juegan un papel muy importante a lo largo del desarrollo del presente curso, de modo que vamos a detenernos en estudiar algunas de ellas.

Ejemplos

Ej.1.19. En $(\mathbb{R}, | \, |)$ la bola abierta de centro a y radio $r > 0$ es el intervalo abierto de extremos $a - r$ y $a + r$:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : \ |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$$

Ej.1.20. Este ejemplo justifica el nombre de bola. En $(\mathbb{R}^2, d_2)$ tenemos que

$$B(a, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2\},$$

que es el interior del círculo (es decir sin la circunferencia) de radio r centrado en el punto (a, b).

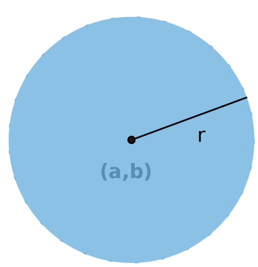


Figura 1.6 – Bola abierta para la distancia d_2.

En el espacio tridimensional $(\mathbb{R}^3, d_2)$ se tiene

$$B(a,r) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2\}$$

que es el interior de la bola sólida (sin la esfera) de radio r centrada en $a = (a,b,c)$.

Ej.1.21. Las bolas abiertas, sin embargo, pueden ser realmente muy diferentes y no tener la apariencia de una esfera, como se muestra en los siguientes casos. En $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ la bola $B(0,r)$ es el interior del cuadrado de centro 0 y de lados paralelos a los ejes de coordenadas y con longitud $2r$. En este caso la bola es

$$B((0,0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ d_\infty((0,0),(x,y)) < r\},$$

es decir, los puntos del plano que verifican $\max\{|x|,|y|\} < r$. Por tanto ha de cumplirse que $|x| < r$ e $|y| < r$; en definitiva, las coordenadas x e y han de estar en el intervalo $(-r,r)$, de modo que la bola será

$$B((0,0),r) = (-r,r) \times (-r,r).$$

De la misma forma se obtiene que para cualquier punto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (véase la Figura 1.7),

$$B((a,b),r) = (a-r, a+r) \times (b-r, b+r).$$

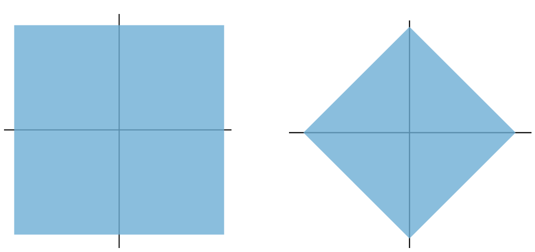


Figura 1.7 – Las bolas métricas en las distancias d_∞ y d_1.

Ej.1.22. En $(\mathbb{R}^2, d_1)$ la bola $B(0,r)$ es el interior del cuadrado centrado en el punto $(0,0)$ y con vértices en los puntos $(0,r),(0,-r),(r,0),(-r,0)$. Ahora tenemos

$$B((0,0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ d_1((0,0),(x,y)) < r\},$$

es decir, los puntos del plano que verifican $|x| + |y| < r$. Si suponemos que $x, y \geq 0$ se debe cumplir $x + y < r$, es decir, se trata de los puntos del plano cuyas coordenadas son no negativas y verifican $y < r - x$; en definitiva, los puntos del primer cuadrante que están por debajo de la recta $y = r - x$. Razonando de la misma manera sobre los posibles signos de las coordenadas se obtiene el cuadrado a que nos referíamos antes (véase la Figura 1.7).

Ej.1.23. Sea un espacio métrico discreto (X, d_D). La bola $B(a, r)$ es el conjunto

$$B(a,r) = \begin{cases} \{a\} & \text{si } r \leq 1 \\ X & \text{si } r > 1 \end{cases}$$

Ej.1.24. Sea $H = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ con la distancia d_H inducida por la distancia d de $\mathbb{R}$. Entonces en $\mathbb{R}$ con la distancia usual la bola $B_d(1, 1)$ es el intervalo $(0, 2)$ mientras que, para la distancia inducida en H, $B_{d_H}(1, 1)$ es el intervalo $(0, 1]$, que es precisamente $(0, 2) \cap [0, 1]$.

Ej.1.25. Sea una función $f_0 \in (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$. La bola $B(f_0, r)$ es el conjunto

$$B(f_0, r) = \{f \in (\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) : \sup\{|f_0(x) - f(x)| \leq r : x \in [0, 1]\}$$

de todas las funciones continuas f en $[0, 1]$ cuya gráfica se encuentra entre las gráficas de las funciones $f_0 - r$ y $f_0 + r$ (véase la Figura 1.8).

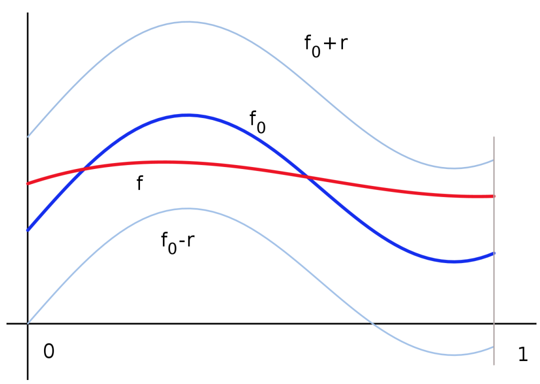


Figura 1.8 – Las bolas métricas en la distancia d_∞ sobre $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Otra vez, puede ser un buen momento para pensar por su cuenta.

Ejercicios y Problemas

P.1.15 Definimos la aplicación $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{si } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

Pruebe que d es una distancia sobre $\mathbb{R}^2$. Determine y represente gráficamente las bolas $B((0,0),1)$, $B((1,0),1)$, $B((0,1),1)$ y $B((2,3),1)$. [R]

P.1.16 Se define la parte entera de un número real $x \in \mathbb{R}$ como $[x] =$ *el mayor número entero menor o igual que* x. Sea la aplicación $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\rho(x,y) = |[x] - [y]| + |(x - [x]) - (y - [y])|.$$

(a) Pruebe que ρ es una distancia en $\mathbb{R}$.

(b) Estudie cómo son las bolas $B_\rho(0,1)$ y $B_\rho(\frac{3}{2},1)$ ¿Cómo son las bolas abiertas?

(c) Pruebe que ρ y la distancia $d(x) = |x - y|$ inducen la misma distancia en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

P.1.17 Pruebe que la aplicación definida como

$$d(x,y) = \text{máx}\{|x_1 - x_2|, d_D(y_1,y_2)\}, \quad \text{con} \quad x = (x_1,y_1), y = (x_2,y_2),$$

es una distancia en $\mathbb{R}^2$. Determine cómo son las bolas. [R]

P.1.18 Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = \frac{2|x-y|}{1+3|x-y|}.$$

Compruebe que es una distancia y determine la bola $B_d(0,r)$. [I]

P.1.19 Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la distancia definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ d_D(x,0) + d_D(0,y) & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

siendo d_D la distancia discreta. Determine analítica y geométricamente las bolas $B_d(x,r)$. [I]

P.1.20 Sea $\mathcal{C}([0,2\pi])$ con la distancia del supremo. Describa analítica y gráficamente cómo son las bolas de radio 1 y centro en las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 2 + \cos x$, respectivamente.

1.3.1. Conjuntos abiertos

Definición 1.3.2. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Diremos que A es un* ***conjunto abierto****, si para cada punto $a \in A$, existe una bola $B(a, r_a)$ contenida en A. Entenderemos que $\varnothing$ es abierto.*

Proposición 1.3.3. *En un espacio métrico, cada bola abierta es un conjunto abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea la bola abierta $B(a, r)$ y veamos que si $x \in B(a, r)$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset B(a, r)$. En efecto, tomemos $\delta = r - d(x, a) > 0$, y comprobemos que si $y \in B(x, \delta)$, entonces $y \in B(a, r)$.

Tenemos que $d(x, y) < \delta$ y según la desigualdad triangular

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \delta = r,$$

lo que significa que $y \in B(a, r)$ y por tanto que $B(x, \delta) \subset B(a, r)$ (véase la Figura 1.9). □

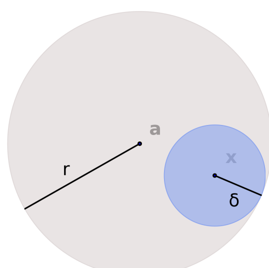


Figura 1.9 – Las bolas abiertas, son conjuntos abiertos.

Teorema 1.3.4 (Propiedad de Hausdorff)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y dos puntos distintos $x, y \in X$. Entonces existen $r_x, r_y > 0$ tales que*

$$B(x, r_x) \cap B(y, r_y) = \varnothing.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $r = d(x, y)$, entonces las bolas $B(x, r/2)$ y $B(y, r/2)$ abiertas, tienen intersección vacía. En efecto, veamos que ningún punto de la primera puede estar en la segunda.

Si $z \in B(x, r/2)$, entonces, por la desigualdad triangular

$$d(z, y) \geq d(x, y) - d(z, x) = r - d(z, x) > r - r/2 = r/2,$$

con lo que $z \notin B(y, r/2)$. Para la otra bola se hace de la misma forma. □

Lema 1.3.5. *La intersección de dos bolas abiertas en un espacio métrico (X, d), es un abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Si la intersección de ambas bolas es vacía, no hay nada que probar. Supongamos entonces que $x \in B(a,r) \cap B(b,s)$ y veamos que tal intersección es un entorno de x. Se cumple que $d(x,a) < r$ y $d(x,b) < s$; tomemos $\delta < \min\{r - d(x,a), s - d(x,b)\}$ y comprobemos que $B(x,\delta) \subset B(a,r) \cap B(b,s)$ (véase la Figura 1.10). En efecto, si $y \in B(x,\delta)$, entonces

$$d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) < \delta + d(x,a) < r - d(x,a) + d(x,a) = r,$$

y por tanto $y \in B(x,a)$. De la misma forma se prueba que $B(x,\delta) \subset B(b,s)$. Con esto hemos probado que la intersección de las dos bolas contiene una bola centrada en cada uno de sus puntos y, por lo tanto es un abierto. □

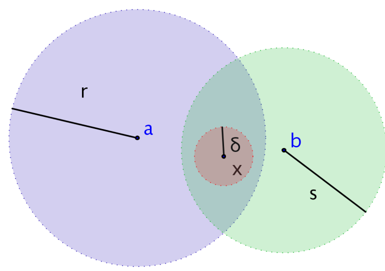


Figura 1.10 – La intersección de bolas abiertas es abierto.

El siguiente resultado es de gran trascendencia.

Teorema 1.3.6. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces se cumplen las propiedades siguientes:*

(a) X y $\varnothing$ son abiertos.

(b) La unión de una familia cualquiera de conjuntos abiertos, es abierto.

(c) La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos, también es abierto.

DEMOSTRACIÓN. -

(a) No hay nada que probar.

(b) Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia cualquiera de subconjuntos abiertos del espacio X; si $x \in \cup_{i \in I} A_i$, entonces $x \in A_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$. Como $A_{i_0 \in I}$ es abierto, existe $r_0 > 0$ tal que $B(x,r_0) \subset A_{i_0} \subset \cup_{i \in I} A_i$ y por tanto este último conjunto es abierto puesto que contiene una bola centrada en cada uno de sus puntos.

(c) Si la intersección es vacía no hay nada que probar. Supongamos entonces, que A_1 y A_2 son dos conjuntos abiertos cuya intersección es no vacía. Si $x \in A_1 \cap A_2$, existen $r_1, r_2 > 0$ de modo $B(x,r_1) \subset A_1$ y $B(x,r_2) \subset A_2$; entonces según el

Lema 1.3.5, hay una bola centrada en x contenida en la intersección de ambas bolas, lo que implica que dicha bola también está en $A_1 \cap A_2$ y que este último conjunto es abierto. Mediante un sencillo proceso de inducción se prueba que la intersección de cualquier familia finita de abiertos es un abierto.

$\square$

A la familia de todos los conjuntos abiertos de un espacio métrico (X, d) se le llama ***topología*** asociada a la distancia d y la designaremos mediante $\mathcal{T}_d$, o simplemente $\mathcal{T}$ si no hay ambigüedad respecto de la distancia. Como era de esperar, teniendo en cuenta el nombre de la asignatura, estas familias serán las protagonistas de nuestro estudio.

En general, si tenemos un conjunto X, a cualquier familia de subconjuntos de X que verifica las tres condiciones del Teorema 1.3.6 se le llama ***topología*** sobre X. En este curso, nos limitaremos a estudiar topologías asociadas a espacios métricos aunque hay espacios topológicos que no son métricos, como se muestra en el Ejemplo **Ej.1.26.**

Ejemplos

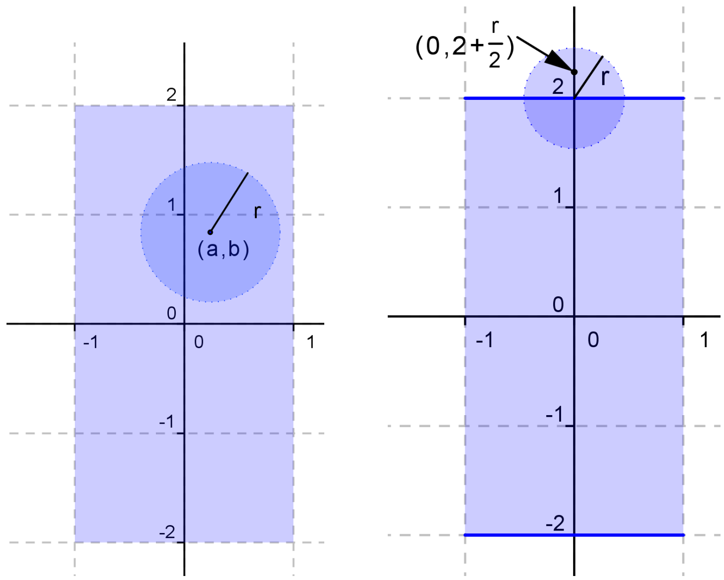
Ej.1.26. Si X es un conjunto con más de un punto, la familia formada por el conjunto vacío y el propio X es una topología $\mathcal{T}_I = \{\varnothing, X\}$ sobre X, pues verifica las tres condiciones del Teorema 1.3.6 fácilmente y no proviene de una distancia pues no verifica la Propiedad de Hausdorff 1.3.4. Esta topología se llama topología ***gruesa*** o ***indiscreta***.

Ej.1.27. Cualquier intervalo abierto de la recta real, acotado o no acotado, es un subconjunto abierto con la distancia usual. También lo son las uniones de intervalos abiertos. Sin embargo, los intervalos $[a, b]$, $[a, b)$ y $(a, b]$ no lo son. Realice, como ejercicio, los detalles.

Ej.1.28. Un conjunto abierto no tiene por qué ser una bola abierta. Así, el subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |x| < 1, \ |y| < 2\}$$

no es una bola abierta de $\mathbb{R}^2$ para la distancia euclídea y, sin embargo, sí es un subconjunto abierto. Se ve fácilmente que el conjunto A es el rectángulo abierto (sin "bordes") $(-1, 1) \times (-2, 2)$ (véase la Figura 1.11 (a)). Para ver que es abierto, comprobemos que contiene una bola, de radio adecuado, centrada en cada uno de sus puntos. Sea $(a, b) \in A$, es decir $a \in (-1, 1)$ y $b \in (-2, 2)$; si tomamos $r < \{1-|a|, 2-|b|\}$ se tiene que $B((a, b), r) \subset A$. En efecto, si $(x, y) \in B((a, b), r)$ se tiene $(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$, de



(a) (b)

Figura 1.11 – No todo conjunto abierto es una bola.

donde se deduce que $|x-a| < r < 1-|a|$ y, por tanto,

$$-1+|a|+a < x < 1-|a|+a,$$

de modo que si $|a| = a$ ($a \geq 0$) queda $-1+2a < x < 1$ y $x \in (-1,1)$; y si $|a| = -a$ ($a < 0$) queda $-1 < x < 1+2a$, y también es $x \in (-1,1)$. De forma similar se comprueba que $y \in (-2,2)$.

Por el contrario, el conjunto siguiente no es abierto

$$B = \{(x,y) \in R^2 : \ \ |x| < 1,\ |y| \leq 2\}.$$

Ahora B es el rectángulo $(-1,1)\times[-2,2]$. Para comprobar que no es abierto basta con encontrar un punto de B tal que cualquier bola con centro en ese punto tenga puntos fuera de B. Tomemos el punto $(0,2)$; entonces para todo $r > 0$ el punto $(0,2+r/2) \notin B$ y, sin embargo, está en la bola $B((0,2),r)$ (véase la Figura 1.11 (b)).

Ej.1.29. Sea $(X,\mathcal{T}_D)$ un espacio métrico discreto ($\mathcal{T}_D$ es la topología inducida por la distancia discreta). Entonces cualquier subconjunto es abierto como se deduce del Ejemplo **Ej.1.23.**.

Ej.1.30. La intersección arbitraria de abiertos no es, en general, un abierto. Más aún, la intersección no finita de bolas concéntricas, no es, necesariamente una bola. Si consideramos la familia de abiertos $\{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : \ n \in \mathbb{N}\}$ en $(\mathbb{R}, |\ |)$, su intersección es

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\},$$

que no es abierto (por cierto ¿sabría demostrar que la intersección anterior es, precisamente $\{0\}$?).

Ej.1.31. La condición de ser abierto depende naturalmente de la distancia y del espacio total. (a) El subconjunto $\{0\} \subset \mathbb{R}$ es abierto para la distancia discreta, pero no lo es para la distancia euclídea.

Proposición 1.3.7. *En un espacio métrico (X, d), un conjunto es abierto si, y sólo si, se puede expresar como unión de bolas abiertas.*

DEMOSTRACIÓN. "$\Rightarrow$" Si $A \subset X$ es un abierto, para cada $x \in A$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A$, de modo que $\cup_{x \in A} B(x, r_x) \subset A$, pero como cada punto de A está en una de estas bolas, también se cumple $A \subset \cup_{x \in A} B(x, r_x)$, con lo que A es unión de bolas abiertas. El recíproco es evidente. $\square$

1.3.2. Abiertos en subespacios

Vamos a ver ahora cómo son los abiertos en los subespacios. Evidentemente, considerados como espacios métricos en sí mismos, los abiertos tienen las propiedades descritas en la sección anterior. Pero nos planteamos estudiar su relación con los abiertos del espacio total.

Proposición 1.3.8. *Sea (X, d) un espacio métrico y un subconjunto $H \subset X$.*

(a) Las bolas abiertas del subespacio métrico (H, d_H) son la intersección de bolas abiertas en el espacio total, con el subconjunto; es decir,

$$B_{d_H}(a, r) = B_d(a, r) \cap H.$$

(b) Un subconjunto de H es abierto en (H, d_H) si, y sólo si, es intersección de un abierto en X con H.

DEMOSTRACIÓN. -

(a) Efectivamente, observemos

$$\begin{aligned} B_{d_H}(a, r) = &\{x \in H : d_H(x, a) = d(x, a) < r\} = \\ &\{x \in X : d(x, a) < r\} \cap H = B_d(x, r) \cap H. \end{aligned} \tag{1.4}$$

(b) Veamos la condición directa. Supongamos que $A \subset H$ es abierto para la distancia inducida, entonces, según la Proposición 1.3.7 A es unión de bolas abiertas en H, luego tenemos, aplicando el apartado (a)

$$A = \bigcup_{a \in A} B_{d_H}(a, r_a) = \bigcup_{a \in A} (B_d(a, r_a) \bigcap H) = \left(\bigcup_{a \in A} (B_d(a, r_a) \right) \bigcap H. \tag{1.5}$$

y queda demostrado.

Para ver la condición inversa sólo hay que invertir correctamente el razonamiento anterior.

□

Ejemplos

Ej.1.32. Observemos que, aunque los abiertos en el subespacio, son intersección de abiertos del espacio con el subconjunto en cuestión, los abiertos del subespacio no son necesariamente, abiertos en el espacio; en efecto, el intervalo $[0, 1)$ es abierto en $([0, 2], d_{[0,2]})$, pues se puede expresar como $(-1, 1) \cap [0, 2]$ (intersección del abierto $(-1, 1)$ en $\mathbb{R}$ con el subespacio), pero no lo es en $\mathbb{R}$ con la distancia usual.

Proposición 1.3.9. *Sea (X, d) un espacio métrico y un sunconjunto $H \subset X$. Entonces son equivalentes:*

(a) Todo abierto en (H, d_H) es también abierto en (X, d).

(b) H es abierto en (X, d).

DEMOSTRACIÓN. -

$\boxed{\text{(a)} \Rightarrow \text{(b)}}$ Está claro puesto que H es abierto en (H, d_H).

$\boxed{\text{(b)} \Rightarrow \text{(a)}}$ Según la Proposición 1.3.8(b), si $A \subset H$ es abierto en H, entonces $A = B \cap H$ para algún abierto $B \subset X$; entonces A es intersección de dos abiertos en X y, por tanto también es abierto (véase el Teorema 1.3.6). □

Hace demasiado tiempo que no pensamos en algunos problemas.

Ejercicios y Problemas

P.1.21 Justifique si son abiertos los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}^2, d_2)$:

A= $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$

B= $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$

C= $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$

D= $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\} \bigcup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 0\}$ [I]

P.1.22 Demuestre que el intervalo $H = [a, b]$ es abierto en (H, d_H), pero que no lo es en el espacio total $\mathbb{R}$ con la distancia euclídea.

P.1.23 Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Demuestre que el conjunto $\{x \in X : \ d(a, x) > r\}$ es abierto. [I] [R]

1.3.3. Conjuntos cerrados

Los que llamaremos conjuntos cerrados juegan, en los espacios métricos, o si queremos, en la topología métrica, un papel tan importante como los conjuntos abiertos y, en cierto sentido dual.

Definición 1.3.10 (Conjunto cerrado)**.** *Sea (X, d) un espacio métrico y $C \subset X$ un subconjunto; diremos que C es un conjunto (o subconjunto)* ***cerrado*** *si su complementario $X - C = C^c$ es un abierto.*

Esta claro, a partir de la definición anterior, que tanto X como $\varnothing$ son cerrados.

La siguiente Proposición 1.3.11 ofrece una primera caracterización de los conjuntos cerrados.

Proposición 1.3.11. *Un subconjunto C de un espacio métrico (X, d) es cerrado si, y sólo si, para todo $x \notin C$ existe una bola abierta, de centro x y radio $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap C = \varnothing$.*

DEMOSTRACIÓN. -

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $C \subset X$ es cerrado quiere decir que C^c es abierto; por tanto, para todo $x \notin C$ ($x \in C^c$) existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset C^c$ y por tanto se cumple que $B(x, r) \cap C = \varnothing$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si para todo $x \notin C$ ($x \in C^c$) existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap C = \varnothing$, entonces $B(x, r) \subset C^c$ y así C^c es abierto, luego C es cerrado. $\square$

Proposición 1.3.12. *Las bolas cerradas son conjuntos cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. -

Sólo hay que ver que su complementario es abierto; y esto es, precisamente lo que propone el Problema **P.1.23**.

□

Ejemplos

Ej.1.33. En $\mathbb{R}$, con la distancia usual, los intervalos cerrados son subconjuntos cerrados (pruébelo); también lo son las semirrectas cerradas $[a, +\infty)$ o $(-\infty, b]$ (pruébelo también).

No son cerrados, los intervalos de la forma $[a, b)$, $(a, b]$, pero observe que tampoco son abiertos (pruébelo), lo que significa que hay conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados.

Sin embargo, un intervalo (a, b) es abierto y no es cerrado.

Ej.1.34. En $(\mathbb{R}^2, d_2)$, el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < 1,\ |y| \leq 2\}$ no es cerrado, pero $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 1,\ |y| \leq 2\}$ sí lo es, lo cual se puede comprobar razonando de forma similar al Ejemplo **Ej.1.28.**.

Ej.1.35. Cualquier recta en $(\mathbb{R}^2, d_2)$ es un conjunto cerrado. Basta ver que su complementario es abierto. Si un punto está fuera de la recta, la bola de centro este punto y radio menor que la distancia de dicho punto a la recta está contenida en el complementario de la recta, lo que prueba que es abierto.

Ej.1.36. Los conjuntos unipuntuales, también son cerrados en un espacio métrico, basta aplicar la Propiedad de Hausdorff 1.3.4. ¿Y los conjuntos finitos?

Los conjuntos cerrados juegan un papel simétrico respecto de los abiertos, de hecho, observe el siguiente resultado y compárelo con el Teorema 1.3.6.

Teorema 1.3.13. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces se cumplen las propiedades siguientes:*

(a) *X y $\varnothing$ son cerrados.*

(b) *La intersección de cualquier familia de conjuntos cerrados, es cerrado.*

(c) *La unión de una colección finita de conjuntos cerrados, también es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. La propiedad (a) es evidente (ya lo hemos comentado antes). Respecto a la propiedad (b), sea la familia de cerrados $\{C_i\}_{i\in I}$, Si la intersección es vacía no hay nada que probar, de modo que supongamos $\cap_{i\in I} C_i \neq \varnothing$. Veamos que el complementario es abierto, para esto aplicamos las leyes de De Morgan

$$X - \bigcap_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I}(X - C_i),$$

como cada uno de los C_i es cerrado, entonces $X - C_i$ es abierto; lo que implica que la unión de todos ellos lo es, lo que demuestra que la intersección $\cap_{i\in I} C_i$ es cerrado.

Para finalizar veamos que la unión finita de conjuntos de la familia en cuestión, es cerrado. De nuevo veremos que su complementario es abierto. Sea $\cup_{i=1}^n C_i$ la unión de una cantidad finita de conjuntos; entonces, aplicando las leyes de De Morgan otra vez

$$X - \bigcup_{i=1}^{n} C_i = \bigcap_{i=1}^{n}(X - C_i)$$

y esta última intersección es abierto por ser intersección finita de abiertos, con lo que concluye la prueba. □

Ejemplos

Ej.1.37. La unión arbitraria de cerrados no es, necesariamente, un cerrado. Consideremos la familia $\{[0, 1 - \frac{1}{n}] : \ n \in \mathbb{N}\}$ de intervalos cerrados en $\mathbb{R}$; su unión es el conjunto no cerrado

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0, 1).$$

Ej.1.38. Cualquier subconjunto en la distancia discreta es cerrado y también abierto. Observe entonces que puede darse el caso de conjuntos que son, a la vez, abiertos y cerrados.

1.3.4. Cerrados en subespacios

Al igual que hacíamos en la sección 1.3.2, nos planteamos estudiar cómo son los cerrados en los subespacios, y su relación con el espacio total.

Proposición 1.3.14. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea H un subconjunto de X. Entonces:*

(a) Las bolas cerradas del subespacio métrico (H, d_H) son intersección de bolas cerradas en el espacio total, con el subconjunto; es decir,

$$\overline{B}_{d_H}(x, r) = \overline{B}_d(x, r) \cap H.$$

(b) Un subconjunto de H es cerrado en (H, d_H) si, y sólo si, es intersección de un cerrado en X con H.

DEMOSTRACIÓN. -

(a). En efecto

$$\overline{B}_{d_H}(a, r) = \{x \in H : d_H(a, x) \leq r\} =$$

$$\{x \in X : d(a, x) \leq r\} \cap H = \overline{B}(x, r) \cap H.$$

(b). Sea $C \subset H$ un cerrado en (H, d_H), entonces $H - C$ es abierto en H y según la Proposición 1.3.8 $H - C = A \cap H$ con A un abierto, esta vez en X; pero como $C \subset H$, $C \subset X - A$ (si $c \in C \cap A$, $c \in H$ luego $c \in A \cap H$, en contra de que $c \in H$) y por tanto $(X - A) \cap H = C$. El recíproco es evidente. □

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.1.24}}$ Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Demuestre que el conjunto $\{x \in X : \; d(a, x) \geq r\}$ es un conjunto cerrado.

$\boxed{\textbf{P.1.25}}$ Considere el espacio métrico de las sucesiones reales acotadas (ℓ^∞, d_∞). Pruebe que el conjunto $A = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : \; \text{lím}_{n\to\infty} x_n = 0\}$ es cerrado. [I] [R]

1.4. Distancias equivalentes

Nos planteamos en esta sección la posibilidad de comparar las topologías que sobre un mismo conjunto, generan distancias diferentes, en el sentido de que sean, o no, iguales, es decir, que tengan los mismos abiertos.

Definición 1.4.1. *Dos distancias d y d' sobre un mismo conjunto X son* ***equivalentes*** *si dan lugar a la misma topología métrica, es decir, si $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$, es decir, generan los mismos conjuntos abiertos.*

Proposición 1.4.2. *Sean d y d' dos distancias definidas sobre un conjunto X. Entonces d y d' son equivalentes si, y sólo si, para todo $x \in X$ y para todo $r > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$B_d(x, \delta) \subset B_{d'}(x, r)$$

y existe $\delta' > 0$ *tal que*
$$B_{d'}(x, \delta') \subset B_d(x, r).$$

DEMOSTRACIÓN. -

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que d y d' son equivalentes. Dados $x \in X$ y $r > 0$, $B_{d'}(x, r)$ es un abierto de $\mathcal{T}_{d'}$ y, por tanto, también está en $\mathcal{T}_d$; entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subset B_{d'}(x, r)$. Análogamente se demuestra la segunda afirmación.

$\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocamente, si suponemos que se cumplen las dos afirmaciones, veamos que d y d' son equivalentes. Sea A un abierto de $\mathcal{T}_d$ y sea $x \in A$. Entonces existe $r > 0$ tal que $B_d(x, r) \subset A$. Aplicando la segunda propiedad, existirá $\delta' > 0$ tal que $B_{d'}(x, \delta') \subset B_d(x, r)$, y, como esto es para todo $x \in A$, tenemos que $A \in \mathcal{T}_{d'}$ y es, por tanto, abierto en esta topología. De forma análoga se demuestra que todo abierto de $\mathcal{T}_{d'}$ lo es también de $\mathcal{T}_d$. $\square$

Teorema 1.4.3. *Dos distancias d y d' sobre un conjunto X son equivalentes si existen constantes $m, M > 0$ tales que para todo par de puntos $x, y \in X$ se satisface*
$$m\, d(x, y) \leq d'(x, y) \leq M\, d(x, y).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in X$ y $r > 0$. Entonces tomando $\delta = r/M$ se tiene que $d(x, y) \leq \delta$ implica que
$$d'(x, y) \leq M d(x, y) \leq M\delta = r,$$
con lo que $B_d(x, \delta) \subset B_{d'}(x, r)$. De forma análoga, tomando $\delta' = mr$ se tiene que $B_{d'}(x, \delta') \subset B_d(x, r)$. $\square$

Ejemplos

Ej.1.39. No todas las distancias definidas en un conjunto son equivalentes. Por ejemplo, la distancia euclídea y la distancia discreta sobre $\mathbb{R}^2$ no son equivalentes, ya que los puntos no son abiertos en la topología usual (generada por la distancia euclídea) y sí lo son en la topología discreta (generada por la distancia discreta).

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.1.26}}$ Demuestre que las tres distancias d_1, d_2 y d_∞ en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, de modo que generan la misma topología métrica (que coincide con la topología usual). En particular, en el caso $n = 1$, las tres distancias son iguales a la distancia usual de $\mathbb{R}$, que viene dada por el valor absoluto. [I]

P.1.27 En $\mathcal{C}([0,1])$ consideremos la distancia d_∞ y la distancia del área:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx.$$

Sea $0 < r \leq 2$ y consideremos las funciones f y g definidas por

$$f(x) = 2 \ \text{ para todo } \ x \in [0,1] \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -\dfrac{4x}{r} + 4 & \text{si } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}r \\ 2 & \text{si } \ \frac{1}{2}r \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Pruebe que $g \in B_d(f,r)$ pero $g \notin B_\infty(f,1)$. Deduzca que d y d_∞ no son equivalentes.

1.5. Espacios normados

Vamos a ver una clase de espacios métricos interesantes e importantes en otras ramas de las matemáticas.

Definición 1.5.1. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una aplicación $\|.\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$, es una **norma** sobre V si verifica:*

(i) $\|x\| \geq 0$.

(ii) $\|x\| = 0$ *si, y solo si,* $x = 0$.

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

*Diremos entonces, que $(V, \|.\|)$ es un **espacio vectorial normado**.*

Proposición 1.5.2. *Un espacio normado $(V, \|.\|)$ es un espacio métrico, con la distancia $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $d(x,y) = \|x - y\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia directa de la definición de norma. □

Ejemplos

Ej.1.40. $\|x\| = |x|$ es una norma sobre $\mathbb{R}$ (considerado $\mathbb{R}$ como espacio vectorial sobre sí mismo).

Ej.1.41. Considerando $\mathbb{R}^n$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, las siguientes, son normas sobre $\mathbb{R}^n$, con $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.
- $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.
- $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i = 1, \ldots, m\}$.

Observe que estas tres normas dan lugar, respectivamente, a las distancias d_1, d_2 y d_∞ que hemos estudiado con detalle.

Ejercicios y Problemas

P.1.28 Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

(a) Demuestre que se trata de una distancia.

(b) Una distancia d es acotada, si existe $M > 0$ tal que $d(x, y) \leq M$ para todo x, y. Demuestre que tanto δ como $\rho(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}$ (véase el Problema **P.1.4**), son acotadas.

(c) Demuestre que d, δ y ρ son equivalentes.

(d) Si d es la distancia usual de $\mathbb{R}$, determine las bolas en $(\mathbb{R}, \rho)$ y en $(\mathbb{R}, \delta)$.

P.1.29 Si X es un conjunto e (Y, d) es un espacio métrico, sea $\mathcal{A}(X, Y)$ el conjunto de las aplicaciones acotadas de X en Y, es decir $f \in \mathcal{A}(X, Y)$ si $f(X) \subset Y$ es un conjunto acotado. Demuestre que si definimos la aplicación $d_\infty : \mathcal{A}(X, Y) \times \mathcal{A}(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}$, como

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) :\in X\},$$

se trata de una distancia (***distancia del supremo***).

P.1.30 Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ una función estrictamente creciente verificando:

(a) $f(0) = 0$;

(b) Si $x, y \geq 0 \Rightarrow f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Si (X, d) es un espacio métrico, pruebe que la aplicación $d' = f \circ d$, es decir, $d'(x, y) = f(d(x, y))$, es también una distancia sobre X. [I] [R]

P.1.31 Sea $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y consideremos el subconjunto A dado por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-2)^2 + y^2 \leq 2\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+2)^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Determine en $(A, d_2|_A)$ la bola cerrada de centro $(0,0)$ y radio 1.

P.1.32 De muestre que en $\mathbb{R}$ con la topología usual, se verifican:

(a) Un conjunto es abierto, si y sólo si, se puede expresar como unión de intervalos abiertos.

(a) Más aún, un conjunto es abierto si, y sólo si, es unión de una colección numerable de intervalos abiertos disjuntos.

P.1.33 Consideremos el conjunto

$$\ell^2 = \{(a_n)_n \text{ sucesión real } : \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ es convergente}\}.$$

Entonces

$$\|(a_n)_n\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\right)$$

es una norma, y por tanto ℓ^2 es un espacio métrico.

P.1.34 Si, en la definición de distancia, la condición *(2)* se cambia por *(2')* "*si* $x \in X$, *entonces* $d(x,x) = 0$" (admitimos la posibilidad de la existencia de $x, y \in X$ distintos con $d(x,y) = 0$), entonces se dice que d es una ***pseudométrica***.

Sea, entonces d una pseudométrica sobre un conjunto X. Definimos la siguiente relación:

$$x \sim y, \quad \text{si, y sólo si} \ \ d(x,y) = 0$$

1. Demuestre que se trata de una relación de equivalencia.
2. Demuestre que la siguiente aplicación es una distancia sobre el conjunto cociente $X/\sim = \{\hat{x} : x \in X\}$ ($\hat{x}$ es la clase de equivalencia de x); $\rho(\hat{x}, \hat{y}) = d(x,y)$. [I] [R]