2

Subconjuntos destacados en la topología métrica

En este capítulo, introducimos una serie de conceptos ligados a los puntos y a conjuntos que por el importante papel que juegan en la topología métrica, llamamos destacados; como son los entornos, la adherencia de un conjunto, los puntos aislados, de acumulación, interiores, exteriores y frontera, presentando relaciones entre ellos. Cuando entra en juego un subespacio, es necesario estudiar la adherencia, el interior y la frontera relativos. Finalizamos con una sección dedicada a las sucesiones, ya que juegan un importante papel en los espacios métricos. Se pretenden alcanzar las siguientes competencias específicas:

1. Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de espacio métrico.
2. Reconocer y utilizar las propiedades sencillas de la topología métrica.
3. Saber calcular la adherencia, el interior y la frontera de subconjuntos de algunos espacios métricos, en particular, de los espacios euclídeos.
4. Saber caracterizar diferentes propiedades y conceptos topológicos mediante el uso de sucesiones, particularmente la continuidad, la adherencia, los subconjuntos cerrados y los subconjuntos compactos.

Los contenidos desarrollados son los siguientes:

- Adherencia, interior y frontera.

- Puntos aislados y de acumulación.
- Adherencia, interior y frontera relativos.
- Sucesiones. Convergencia.
- Caracterización mediante sucesiones de los puntos adherentes y puntos frontera.
- Conjuntos densos y espacios separables.

2.1. Entornos

Definición 2.1.1. *Si (X, d) es un espacio métrico, diremos que un subconjunto $U \subset X$ es* ***entorno*** *de un punto $x \in X$ si verifica que $x \in U$ y existe un abierto $A \in \mathcal{T}$, tal que $x \in A \subset U$. A la familia de entornos de un punto $x \in X$ la denotaremos por $\mathcal{U}_x$.*

Proposición 2.1.2. *Si (X, d) es un espacio métrico, son equivalentes:*

(a) $U \subset X$ es entorno de un punto $x \in X$.

(b) Existe $r > 0$, tal que $B(x, r) \subset U$.

DEMOSTRACIÓN. -

"(a)⇒(b)" Por ser U entorno de x, existe A abierto con $x \in A \subset U$, luego para algún $r > 0$, $B(x, r) \subset A$ y por tanto $B(x, r) \subset U$.

"(b)⇒(a)" Como $B(x, r)$ es abierto, es consecuencia de la definición.

□

Ejemplos

Ej.2.1. En un espacio discreto, un subconjunto U es entorno de un punto x si, y sólo si, $x \in U$; en particular un conjunto unipuntual es entorno del punto en cuestión, pues según hemos visto en el **Ej.1.23.**, todos los subconjuntos de un espacio discreto son abiertos (y también cerrados).

Ej.2.2. En $\mathbb{R}$ con la distancia usual, el intervalo $[0, 2]$ es entorno del 1 (¿por qué?). En consecuencia un entorno no es necesariamente, un conjunto abierto.

Ej.2.3. Una bola abierta es entorno de todos sus puntos, pues según hemos visto en la Proposición 1.3.3, contiene una bola centrada en cada uno de sus puntos.

Proposición 2.1.3. *Sea (X,d) un espacio métrico. Son equivalentes:*

(a) $A \subset X$ *es abierto.*

(b) A *es entorno de todos sus puntos.*

DEMOSTRACIÓN. -

"(a)⇒(b)" Si $x \in A$ y A es abierto, entonces $x \in A \subseteq A$, es decir, $A \in \mathcal{U}_x$.

"(a)⇒(b)" Si A es entorno de cada uno de sus puntos, para cada uno de ellos, existe $A_x \in \mathcal{T}_d$ abierto, tal que $x \in A_x \subset A$, lo que significa que $A = \cup_{x \in A} A_x$ que es abierto por ser unión de conjuntos abiertos. □

Proposición 2.1.4. *Sea (X,d) un espacio métrico y un punto $x \in X$. La familia de entornos de x, $\mathcal{U}_x$ verifica las siguientes propiedades:*

(1) *Si $U \in \mathcal{U}_x$, entonces $x \in U$.*

(2) *Si $U \in \mathcal{U}_x$ y $U \subset V$, entonces $V \in \mathcal{U}_x$.*

(3) *Si $U, V \in \mathcal{U}_x$, entonces $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.*

(4) *Si $U \in \mathcal{U}_x$, existe $V \in \mathcal{U}_x$ tal que $x \in V \subset U$ y $V \in \mathcal{U}_y$ para todo $y \in V$.*

DEMOSTRACIÓN. -

(1) Por la propia definición de entorno.

(2) Como $U \in \mathcal{U}_x$, entonces existe un abierto A de modo que $x \in A \subset U$, pero entonces $x \in A \subset V$; por tanto, $V \in \mathcal{U}_x$.

(3) Si $U, V \in \mathcal{U}_x$ existen abiertos A, B, tales que $x \in A \subset U$ y $x \in B \subset V$. Esto implica que $x \in A \cap B \subset U \cap V$, y como $A \cap B$ es abierto por ser intersección de dos abiertos, tendremos que $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.

(4) Como $U \in \mathcal{U}_x$, existe un abierto $A \in \mathcal{T}$ tal que $x \in A \subset U$; basta tomar $A = V$, ya que al ser abierto es entorno de todos sus puntos.

□

La familia de todos los entornos es habitualmente muy grande y, con frecuencia, difícil de manipular. Incluso en el caso de $\mathbb{R}$, con la topología usual, los entornos pueden no ser sencillos, lo que se resuelve trabajando con los intervalos. En el caso general introduciremos un concepto que facilitará el trabajo de forma semejante.

Definición 2.1.5. *Sea (X,d) un espacio métrico, un punto $x \in X$ y una subfamilia $\mathcal{B}_x \subset \mathcal{U}_x$ de la familia de entornos de x. $\mathcal{B}_x$ es una* ***base de entornos*** *de x, o* ***base local*** *de x en (X,d), si se verifica que para todo entorno $U \in \mathcal{U}_x$ existe $V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subset U$.*

Ejemplos

Ej.2.4. En un espacio métrico, las bolas abiertas centradas en un punto son base de entornos de dicho punto, como consecuencia de la Proposición 2.1.3 y de que todo abierto es unión de bolas abiertas (Proposición 1.3.7).

En concreto, en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, una base de entornos para cada punto $x \in \mathbb{R}$ es la familia formada por los intervalos abiertos de centro x y radio $r > 0$, es decir, $\{(x - r, x + r) : r > 0\}$.

Ej.2.5. Si (X, d_D) es un espacio métrico discreto, $\{x\}$ es un entorno de x, para todo $x \in X$. Entonces la familia formada sólo por este entorno $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ es claramente una base de entornos de x.

Estamos en condiciones de practicar y profundizar un poco por cuenta propia. De modo que puede trabajar con los ejercicios y problemas siguientes. Por otra parte, la parte correspondiente al estudio de los entornos en los subespacios presenta dos resultados básicos que se enuncian en los Problemas **P.2.1** y **P.2.2**, a los que debe prestar atención.

Ejercicios y Problemas

P.2.1 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $H \subset X$. Dado $x \in H$, un subconjunto $V \subset H$ es un entorno relativo de x, es decir, en (H, d_h) ($V \in \mathcal{U}_x^H$) si, y sólo si, existe U entorno de x en el espacio total ($U \in \mathcal{U}_x$) de forma que $V = U \cap H$. [I] [R]

P.2.2 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $x \in H \subset X$. Si $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos de x en (X, d), la familia $\mathcal{B}_x^H = \{B \cap H : B \in \mathcal{B}_x\}$ es una base de entornos para la distancia relativa. [I] [R]

P.2.3 Demuestre que, en un espacio métrico, todo punto tiene una base de entornos numerable. [I]

P.2.4 En $\mathbb{R}$ con la topología (distancia) usual, estudie si los siguientes intervalos son entornos de 0 o no lo son: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; $(-1, 0]$; $\left[0, \frac{1}{2}\right)$; $(0, 1]$.

P.2.5 Considere el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Estudie cuáles de los siguientes conjuntos son entornos del origen de coordenadas:

- $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$
- $(-\frac{1}{2}, 0] \times (-1, 0]$
- $[0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{4}]$
- $(0, 1] \times (0, \frac{1}{2}]$.

2.2. Adherencia

Definición 2.2.1. *Sea (X,d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Se dice que $x \in X$ es un* ***punto adherente*** *de A si todo entorno U de x cumple que $U \cap A \neq \varnothing$, es decir, no hay ningún entorno de x totalmente contenido en $X - A$. El conjunto de puntos adherentes de A se llama la* ***adherencia*** *o la* ***clausura*** *de A y se representa por $\overline{A}$.*

Observación 2.2.2. *Tal y como hemos definido la adherencia de un conjunto A, es evidente que $A \subset \overline{A}$.*

Proposición 2.2.3. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$ un conjunto. Entonces, $x \in X$ es $x \in \overline{A}$ si, sólo si, para todo $r > 0$, se cumple $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia inmediata de las definiciones de entorno y de punto adherente. □

Teorema 2.2.4. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces:*

(a) El conjunto $\overline{A}$ es cerrado.

(b) $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A, es decir, si B es un conjunto cerrado tal que $A \subset B$, entonces $\overline{A} \subset B$.

DEMOSTRACIÓN. -

(a) Veamos que el complementario de $\overline{A}$ es abierto. Si $x \in X - \overline{A}$, de acuerdo con la Proposición 2.2.3 existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \varnothing$, lo que significa que $B(x,r) \subset X - A$; veamos que, además, $B(x,r) \subset X - \overline{A}$ con lo que este último conjunto será abierto. En efecto, para todo $y \in B(x,r)$, la bola $B(x,r)$ es un entorno de y que no corta a A, luego $y \notin \overline{A}$. Es decir, $B(x,r) \subset X - \overline{A}$, como deseabamos probar.

(b) Razonaremos por reducción al absurdo. Sea B un cerrado tal que $A \subset B$ y supongamos que $\overline{A} \not\subset B$, es decir, que existe un punto $x \in \overline{A}$ tal que $x \notin B$. Entonces $X - B$ es un abierto que contiene al punto x y como que $A \subset B$, se cumple que $(X - B) \cap A = \varnothing$. Por tanto, x no es un punto adherente de A, lo cual es una contradicción.

□

Corolario 2.2.5. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Se verifican:*

(a) $\overline{A}$ es el conjunto intersección de todos los conjuntos cerrados en X que contienen a A.

(b) A es cerrado si, y sólo si, $A = \overline{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Ambas son consecuencia inmediata del Teorema 2.2.4. □

Proposición 2.2.6. *Sea (X, d) un espacio métrico, A y B subconjuntos de X. Entonces se cumplen las propiedades siguientes:*

(a) Si $A \subset B$ entonces $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$.

DEMOSTRACIÓN. -

(a) Si $x \in \overline{A}$, entonces para todo $U \in \mathcal{U}_x$ se cumple que $U \cap A \neq \varnothing$. Como $U \cap A \subset U \cap B$, se cumple también que $U \cap B \neq \varnothing$. Por tanto, $x \in \overline{B}$.

(b) "$\subset$" Tenemos que $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$, luego por la propiedad (a) se cumple que $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Por tanto $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

"$\supset$" Para ver la inclusión contraria, sea $x \in \overline{A \cup B}$. Si x no es adherente a A ni a B, existirán dos entornos $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_x$ tales que $U_1 \cap A = \varnothing$ y $U_2 \cap B = \varnothing$.

Por otra parte, $U_1 \cap U_2$ es entorno de x tal que $(U_1 \cap U_2) \cap (A \cup B) = \varnothing$; pero esto es contradictorio con el hecho de que $x \in \overline{A \cup B}$ pues todo entorno de x debería cortar a $A \cup B$.

□

Veamos algunos ejemplos que ayuden a asimilar estos últimos resultados.

Ejemplos

Ej.2.6. Consideremos $\mathbb{R}$ con la distancia usual. Si $A = (0, 1]$ entonces $\overline{A} = [0, 1]$, ya que cada entorno del número 0 interseca a A, mientras que cada punto fuera de $[0, 1]$ tiene un entorno disjunto con A. En efecto, si $(-r, r)$, con $r > 0$, es un entorno de 0, está claro que $(-r, r) \cap (0, 1] \neq \varnothing$, con lo que $0 \in \overline{A}$ y, por tanto, $[0, 1] \subseteq \overline{A}$. Para comprobar que la anterior inclusión es una igualdad, supongamos que $x \in \overline{A}$ pero $x \notin [0, 1]$; si $x > 1$ existe $\delta > 0$ tal que $1 < x - \delta$, por lo que $(x - \delta, x + \delta)$ es un entorno de x que verifica $(x - \delta, x + \delta) \cap A = \varnothing$, en contra de que x es un punto adherente. Análogamente se comprueba que si $x < 0$ entonces $x \notin \overline{A}$.

Ej.2.7. En un espacio discreto, un punto x es adherente a un conjunto si, y sólo si, pertenece a dicho conjunto, ya que los conjuntos unipuntuales son bolas abiertas.

Proposición 2.2.7. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto. Entonces un punto $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, la distancia de x a A es $d(x, A) = 0$. En otras palabras $\overline{A} = \{x \in X : d(x, A) = 0\}$.*

DEMOSTRACIÓN. -

"⇒" Supongamos que $x \in \overline{A}$ y que, sin embargo, $d(x, A) = \lambda > 0$; entonces $B(x, \lambda/2) \cap A = \varnothing$, ya que si $y \in B(x, \lambda/2) \cap A$, entonces $d(x, y) < \lambda/2 < \lambda$ y λ no sería el ínfimo. Esto contradice el hecho de que x es un punto adherente de A.

"⇐" Recíprocamente, si $0 = d(x, A) = \text{ínf}\{d(x, y) : y \in A\}$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe un punto $y \in A$ tal que $d(x, y) < 1/n$, de modo que $B(x, 1/n) \cap A \neq \varnothing$. Por tanto, $x \in \overline{A}$ □

Practique por su cuenta.

Ejercicios y Problemas

P.2.6 Determine la clausura de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, justificando adecuadamente su respuesta:

(1) $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$.
(2) $C = \{0\} \cup (1, 2)$.
(3) $\mathbb{Q}$ (el conjunto de los números racionales).
(4) $\mathbb{N}$ (el conjunto de los números enteros).
(5) $\mathbb{R}_+$ (el conjunto de los números reales positivos).

P.2.7 Demuestre que si A es un cerrado en un espacio métrico y $x \notin A$, entonces $d(x, A) > 0$. [I]

P.2.8 Demuestre que una bola cerrada, en un espacio métrico, es la adherencia de la correspondiente bola abierta.

P.2.9 Encuentre en $\mathbb{R}$ con la topología usual (o en $\mathbb{R}^2$), ejemplos de conjuntos A y B, de manera que los conjuntos siguientes sean distitntos

$$A \cap \overline{B}, \quad \overline{A} \cap B, \quad \overline{A \cap B} \quad \text{y} \quad \overline{A} \cap \overline{B}.$$

P.2.10 Si A y B son dos subconjuntos de un espacio métrico, demuestre que

$$\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

El ejercicio **P.2.9** anterior le habrá proporcionado un ejemplo que muestre que la inclusión puede ser estricta.

2.2.1. Adherencia relativa

Veamos cual es el comportamiento de los subespacios con respecto a la adherencia. Si tenemos un espacio métrico (X, d) y un subconjunto $H \subset X$, se puede estudiar la adherencia de un subconjunto $A \subset H$, tanto en H, $\overline{A}^H$, como en X, $\overline{A}$. ¿Cuál es la relación entre ambas? Vamos a estudiarla a continuación.

Proposición 2.2.8. *Sea (X, d) un espacio métrico y $H \subset X$. Consideremos el subespacio métrico (H, d_H) y sea $A \subset H \subset X$. Entonces*

$$\overline{A}^H = \overline{A} \cap H.$$

DEMOSTRACIÓN. -

"$\subset$" Como $\overline{A}$ es cerrado en X, según la Proposición 1.3.14, el conjunto $\overline{A} \cap H$ es cerrado en H. Además, como $A \subset H$, tenemos que $A \subset \overline{A} \cap H$ y como la adherencia de A en H es el menor de los cerrados de H que contiene a A, tendremos que $\overline{A}^H \subset \overline{A} \cap H$.

"$\supset$" Recíprocamente, sea $x \in \overline{A} \cap H$. Para ver que $x \in \overline{A}^H$, hay que ver que toda bola $B_H(x, r)$ tiene intersección no vacía con A. En efecto, según la Proposición 1.3.8, $B_H(x, r) = B(x, r) \cap H$; y como $x \in \overline{A}$, tenemos que $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$, y por tanto $B_H(x, r) \cap A = B(x, r) \cap H \cap A \neq \varnothing$, lo que significa que $x \in \overline{A}^H$. $\square$

Ejemplos

Ej.2.8. La adherencia de $(0, 1)$ en $(0, +\infty)$ (considerado este último como subespacio topológico de $\mathbb{R}$ con la topología usual) es $(0, 1]$, ya que, aplicando la Proposición 2.2.8 anterior

$$\overline{(0,1)}^{(0,+\infty)} = \overline{(0,1)} \cap (0, +\infty) = [0, 1] \cap (0, +\infty) = (0, 1].$$

2.3. Puntos de acumulación (o límite) y puntos aislados

Definición 2.3.1. *Sea (X, d) un espacio topológico y $A \subset X$. Diremos que un punto $x \in X$ es un **punto de acumulación** (**o punto límite**) de A si cualquier entorno U de x contiene un punto de A distinto de x. Es decir, si*

$$(U - \{x\}) \cap A \neq \varnothing.$$

*El conjunto de todos los puntos de acumulación de A se llama **conjunto derivado** de A, y se representa por A'.*

Proposición 2.3.2. *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $A \subset X$ *un subconjunto. Entonces* $x \in X$ *es un punto de acumulación de* A *si, y sólo si, para todo* $r > 0$ *se cumple que* $(B(x, r) - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$

DEMOSTRACIÓN. Se trata únicamente de aplicar la definición de abierto en un espacio métrico. □

Un concepto dual, en cierto sentido, es el de punto aislado.

Definición 2.3.3. *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $A \subset X$. *Diremos que un punto* $x \in A \subset X$ *es un* ***punto aislado*** *de* A *si existe un entorno* U *de* x *tal que* $U \cap A = \{x\}$.

Proposición 2.3.4. *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $A \subset X$ *un subconjunto. Entonces* $x \in X$ *es un punto de aislado de* A *si, y sólo si, existe* $r > 0$ *de modo que que* $B(x, r) \cap A = \{x\}$

DEMOSTRACIÓN. Se trata únicamente de aplicar la definición de abierto en un espacio métrico. □

El siguiente resultado proporciona una relación entre puntos adherentes, puntos de acumulación y puntos aislados.

Proposición 2.3.5. *Sea* (X, d) *un espacio topológico y* $A \subset X$. *Entonces:*

(a) *El conjunto de puntos aislados de* A *es* $\overline{A} - A'$.

(b) $\overline{A} = A \cup A'$.

DEMOSTRACIÓN. -

(a) Si $x \in A$ es un punto aislado, también es un punto adherente puesto que $A \subset \overline{A}$, pero, sin embargo, no puede ser punto de acumulación puesto que existe $r > 0$ con $B(x, r) \cap A = \{x\}$.

Recíprocamente, si $x \in \overline{A} - A'$, significa que toda bola centrada en x corta al conjunto A, pero como $x \notin A'$, existe una bola $B(x, r) - \{x\} = \varnothing$, es decir $B(x, r) \cap A = \{x\}$, luego x es un punto aislado de A.

(b) "$\supset$" Si $x \in A'$, cada bola de centro x interseca a A en un punto distinto de x, luego $x \in \overline{A}$, luego $A' \subset \overline{A}$ y, como $A \subset \overline{A}$, se sigue que $\overline{A} \supset A \cup A'$.

"$\subset$" Supongamos ahora que x es un punto de $\overline{A}$. Si $x \in A$, es claro que $x \in A \cup A'$. Supongamos que $x \notin A$; como $x \in \overline{A}$, cada bola $B(x, r)$ interseca a A, pero como $x \notin A$, dicha bola tener en común con A un punto distinto de x y, por tanto $x \in A'$; en definitiva, $x \in A \cup A'$. □

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

Ej.2.9. Consideremos la recta real $\mathbb{R}$.

(a) El punto 0 es un punto de acumulación de $A = (0, 1]$, puesto que toda bola $B(0, r) = (-r, r)$ cumple $(-r, r) \cap (0, 1] \neq \varnothing$. De hecho, cada punto del intervalo $[0, 1]$ va a ser un punto de acumulación de A, pero ningún otro punto de $\mathbb{R}$ es un punto de acumulación de A. En efecto, si $x < 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $x + \delta < 0$, de modo que $(x - \delta, x + \delta) \cap A = \emptyset$, por lo que $x \notin A'$. Análogamente se prueba que si $x > 1$ entonces $x \notin A'$.

(b) El conjunto derivado de $B = \{1/n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ es $B' = \{0\}$, pues 0 es un punto de acumulación de B y cualquier otro punto x de $\mathbb{R}$ tiene un entorno que, o no llega a intersecar a B, o interseca a B sólo en el propio punto x.

En efecto, $0 \in B'$ pues para todo $r > 0$, el intervalo $(-r, r)$ es un entorno de 0 y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/m < r$ con lo que $[(-r, r) - \{0\}] \cap B \neq \varnothing$. Para comprobar que ningún otro número real está en B' vamos a contemplar varios casos. Primero, supongamos que $x = 1/m$ para algún $m \in \mathbb{N}$; entonces si tomamos $r < 1/m - 1/(m + 1)$ está claro que el intervalo $(1/m - r, 1/m + r)$ corta a B en un único punto que es, precisamente, $1/m$; segundo, si $x \notin B$ y $x > 1$ basta tomar $r < x - 1$ para que $(x - r, x + r) \cap B = \varnothing$; de forma análoga se razona si $x < 0$. Por último si, para algún $m \in \mathbb{N}$ es $1/(m + 1) < x < 1/m$, tomamos $r < \text{mín}\{x - 1/(m + 1), 1/m - x\}$ y entonces $(x - r, x + r) \cap B = \varnothing$. Con esto queda probado que $B' = \{0\}$.

(c) Si $C = \{0\} \cup (1, 2)$, entonces C' es igual a $[1, 2]$. La demostración es análoga a la del apartado anterior.

Ej.2.10. Vamos a determinar los conjuntos derivados de $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}_+$ en $(\mathbb{R}, d_u)$. En primer lugar, es fácil ver que cada punto de $\mathbb{R}$ es un punto de acumulación de $\mathbb{Q}$, pues en cualquier intervalo abierto existen números racionales.

En cuanto a $\mathbb{N}$, ningún punto de $\mathbb{R}$ es un punto de acumulación de $\mathbb{N}$. En efecto, si $x \notin \mathbb{N}$ entonces existe un número natural n tal que $n < x < n+1$. Sea $\delta < \text{mín}\{x - n, n + 1 - x\}$. Entonces $(x - \delta, x + \delta) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, por lo que $x \notin \overline{\mathbb{N}}$ (y, por tanto, $x \notin \mathbb{N}'$). Pero si ahora suponemos que $x \in \mathbb{N}$ entonces $(x - 1, x + 1) \cap \mathbb{N} = \{x\}$, por lo que $x \notin \mathbb{N}'$.

Finalmente, si $\mathbb{R}_+$ es el conjunto de los reales positivos, entonces cada punto de $\{0\} \cup \mathbb{R}_+$ es un punto de acumulación de $\mathbb{R}_+$, y ningún otro punto de $\mathbb{R}$ es un punto de acumulación. El razonamiento es análogo al **Ej.2.9.** (a).

Ej.2.11. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, todo número natural $n \in \mathbb{N}$ es un punto adherente de $\mathbb{N}$ pero no es de acumulación; es decir, los naturales son puntos aislados en $(\mathbb{R}, d_u)$. En efecto, la bola $(B(n, 1/2) - \{n\}) \cap \mathbb{N} = \varnothing$.

2.4. Interior de un conjunto

Definición 2.4.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto. Diremos que $x \in A$ es un **punto interior** de A, si A es un entorno de x. El conjunto de los puntos interiores de A se denomina el **interior** de A y se representa por $\overset{\circ}{A}$ o $\operatorname{Int} A$.*

*Un punto $x \notin A$ se dice que es **exterior** a A si $x \in \operatorname{Int}(X - A)$, y el conjunto de puntos exteriores de A se denomina **exterior** de A y se representa por $\operatorname{Ext} A$.*

Observación 2.4.2. *Es obvio que para cualquier conjunto $A \subset X$ se satisface*

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}.$$

Observación 2.4.3. *Si A es un subconjunto de un espacio métrico, entonces $\overset{\circ}{A}$ es, obviamente, un conjunto abierto.*

Ejemplos

Ej.2.12. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, $\operatorname{Int}[0, 1) = (0, 1)$. En efecto, como $(0, 1)$ es abierto, es entorno de todos sus puntos y, por tanto, se da la inclusión $(0, 1) \subset \operatorname{Int}[0, 1)$. Por otra parte, $0 \notin \operatorname{Int}[0, 1)$, pues para todo $\delta > 0$, se tiene claramente que $(-\delta, \delta) \cap [0, 1)^c \neq \varnothing$, luego la inclusión es una igualdad.

Ej.2.13. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing$ pues para todo $q \in \mathbb{Q}$ y todo $r > 0$, el entorno $(q-r, q+r)$ contiene irracionales. De la misma manera se comprueba que el exterior de $\mathbb{Q}$, es decir, el interior de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ (irracionales), también es vacío.

Proposición 2.4.4. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$, entonces*

$$\overset{\circ}{A} = X - \overline{X - A}.$$

DEMOSTRACIÓN. -

Tenemos que $x \in \overset{\circ}{A}$, si, y sólo si, existe $r > 0$, tal que $B(x, r) \subset A$, es decir $B(x, r) \cap (X - A) = \varnothing$, lo que es equivalente a que $x \notin \overline{X - A}$. $\square$

Una importante característica del interior de un conjunto es que se trata del mayor abierto contenido en dicho conjunto.

Proposición 2.4.5. *Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es abierto si, y sólo si, $A = \overset{\circ}{A}$.*

DEMOSTRACIÓN. -
Como $\overset{\circ}{A} \subset A$, sólo hay que probar la inclusión en sentido contrario. Si $x \in A$, como A es abierto, se tiene que el propio A es entorno de x, por tanto $x \in \overset{\circ}{A}$, de donde se deduce que $A \subset \overset{\circ}{A}$. □

Las propiedades que se recogen en los tres Problemas **P.2.11**, **P.2.12** y **P.2.13** siguientes son importantes y conviene que les preste atención.

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.2.11}}$ Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces un punto $x \in A$ es un punto interior de A si, y sólo si, $d(x, X - A) > 0$. [I] [R]

$\boxed{\textbf{P.2.12}}$ El interior posee las siguientes propiedades, que son duales de las correspondientes de la adherencia, probadas en la Proposición 2.2.6.

Sea (X, d) un espacio métrico, y sean A_1 y A_2 subconjuntos de X. Entonces:

(a) Si $A_1 \subset A_2$, entonces $\overset{\circ}{A_1} \subset \overset{\circ}{A_2}$

(b) $\overset{\circ}{A_1} \cap \overset{\circ}{A_2} = (A_1 \cap A_2)^\circ$.

(c) $(A_1 \cup A_2)^\circ \supseteq \overset{\circ}{A_1} \cup \overset{\circ}{A_2}$. Encuentre un ejemplo en el que se muestre que la inclusión puede ser estricta. [I] [R]

$\boxed{\textbf{P.2.13}}$ Sea (X, d) un espacio métrico y $H \subset X$. Consideremos el subespacio métrico (H, d_H) y sea $A \subset H \subset X$. Entonces

$$\mathrm{Int}_H A \supset \overset{\circ}{A} \cap H.$$

[I] [R]

$\boxed{\textbf{P.2.14}}$ Compruebe que la inclusión anterior puede ser estricta considerando $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual; para ello compare el interior de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y el interior de $\mathbb{Q}$ en el subespacio $\mathbb{Q}$

2.5. Frontera de un conjunto

Definición 2.5.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto. Diremos que $x \in X$ es un **punto frontera** de A si para todo entorno U de x se cumple que $U \cap A \neq \varnothing$ y $U \cap (X - A) \neq \varnothing$. El conjunto de los puntos frontera de A se denomina la **frontera** de A, y se representa por $\mathrm{Fr}(A)$, o también como ∂A.*

Como consecuencia de la definición, el siguiente resultado es obvio.

Proposición 2.5.2. *Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$, entonces $x \in \mathrm{Fr}(A)$ si, y sólo si, para todo $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$ y $B(x, r) \cap (X - A) \neq \varnothing$.*

Además se cumplen las dos propiedades recogidas en la siguiente proposición.

Proposición 2.5.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto. Entonces:*

(a) $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$.

(b) $\mathrm{Fr}(A)$ *es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. -

El apartado (a) es una consecuencia inmediata de las definiciones de frontera y adherencia (asegúrese de que para usted es inmediato). El apartado (b) se deduce del (a), ya que la intersección de dos cerrados es un cerrado. □

Algunos ejemplos nos ayudarán a ilustrar los últimos conceptos y resultados.Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos

Ej.2.14. La frontera de $(0, 1)$ en $(\mathbb{R}, d_u)$ es el conjunto de dos elementos $\{0, 1\}$. En efecto, utilizando la Proposición 2.5.3 se tiene

$$\mathrm{Fr}(0, 1) = \overline{(0, 1)} \cap \overline{\mathbb{R} - (0, 1)} = [0, 1] \cap \{(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)\} = \{0, 1\}.$$

Ej.2.15. Todos los números reales son puntos frontera de $\mathbb{Q}$, es decir, $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$, ya que si $q \in \mathbb{Q}$ entonces el entorno $(q-r, q+r)$, para todo $r > 0$, contiene números racionales e irracionales.

Corolario 2.5.4. *Sea (X,d) un espacio métrico y $H \subset X$. Consideremos el subespacio métrico (H,d_H) y sea $A \subset H \subset X$. Entonces, si $\mathrm{Fr}_H(A)$ es la frontera de A relativa a H,*

$$\mathrm{Fr}_H(A) \subset \mathrm{Fr}(A) \cap H.$$

DEMOSTRACIÓN. -

La frontera de A en H está dada, según la Proposición 2.5.3, por

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}_H(A) &= \overline{A}^H \cap \overline{H-A}^H = (\overline{A} \cap H) \cap (\overline{H-A} \cap H)\\ &= \overline{A} \cap \overline{H-A} \cap H \subset \overline{A} \cap \overline{X-A} \cap H = \mathrm{Fr}(A) \cap H.\end{aligned}$$

□

Ejemplos

Ej.2.16. En general, la inclusión del Corolario 2.5.4 es estricta ya que

$$\mathrm{Fr}_{\mathbb{Q}}\,\mathbb{Q} = \varnothing \subset \mathrm{Fr}\,\mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}.$$

Para finalizar veamos una bonita relación entre los conjuntos interior, clausura y frontera.

Proposición 2.5.5. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto. Entonces* $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} - \mathring{A}$.

DEMOSTRACIÓN. -

La Proposición 2.5.3 implica que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X-A}$. Entonces usando la Proposición 2.4.4 tenemos

$$\overline{A} \cap \overline{X-A} = \overline{A} \cap (X - \mathring{A}) = \overline{A} - \mathring{A},$$

□

El Problema **P.2.15** siguiente, corresponde, de nuevo, a una interesante propiedad a la que debe prestar atención.

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.2.15}}$ Sea (X,d) un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces A es abierto si, y sólo si, $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$. [I] [R]

P.2.16 En $(\mathbb{R}, d_u)$ se consideran los subconjuntos

$$A = [0,1), \quad B = \mathbb{Q} \cap [1,2], \quad C = (2,3] \cup \{4\}, \quad D = A \cup B \cup C.$$

Calcule las adherencias de A, B y C relativas a D, es decir $\overline{A}^D$, $\overline{B}^D$ y $\overline{C}^D$.

P.2.17 En $(\mathbb{R}^2, d_2)$ calcule el interior, el exterior y la frontera de los conjuntos siguientes:
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/n,\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq y \leq 1\}$,
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$,
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = n,\ y = 1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$

P.2.18 Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestre que si $A \subset B$, entonces todo punto de acumulación de A es un punto de acumulación de B, es decir, $A' \subset B'$.

P.2.19 Demuestre que un conjunto A es abierto en un espacio métrico (X,d) si, y sólo si, para todo $M \subset X$ tal que $A \cap M = \varnothing$, también se cumple que $\overline{M} \cap A = \varnothing$. [I] [R]

2.6. Sucesiones

En esta sección vamos a estudiar el concepto de sucesión en un espacio métrico. Estos subconjuntos juegan un papel importante en la topología de los espacios métricos.

Definición 2.6.1. *Sea (X,d) un espacio métrico, una* ***sucesión*** *en X es un subconjunto de X definido mediante una aplicación $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$, de tal modo que $x(n) = x_n \in X$; denotaremos a la sucesión mediante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, o $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ o simplemente $(x_n)_n$; y a los elementos de la sucesión les llamaremos* ***términos****.*

Observación 2.6.2. *la aplicación que define la sucesión no ha de ser necesariamente inyectiva, lo que significa que puede haber términos repetidos en una sucesión; por ejemplo $((-1)^n)_n$ es la sucesión $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$.*

Definición 2.6.3. *Sea (X,d) un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de puntos de X. Diremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$* ***converge*** *a x en (X,d), y lo denotaremos por $x_n \to x$ o $\lim_n x_n = x$, si*

para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq n_0$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon$.

En otras palabras si

para toda bola $B(x,\varepsilon)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que si $n \geq n_0$, entonces $x_n \in B(x,\varepsilon)$.

En este caso se dice que la sucesión es ***convergente hacia el punto*** *x, o que x es* ***el límite*** *de la sucesión.*

Ejemplos

Ej.2.17. Si (X, d_D) es un espacio discreto una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto x si, y sólo si es constante igual a x a partir de un término (a estas sucesiones se les llama *de cola constante*, ya que las bolas de centro x y radio menor que 1 coinciden con el conjunto unipuntual $\{x\}$.

Ej.2.18. El concepto de convergencia que acabamos de definir coincide con el ya conocido de convergencia en $\mathbb{R}$ con el valor absoluto, es decir, en la topología usual. Recordemos que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} x \subset \mathbb{R}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que si $n > n_0$, entonces $|x_n - x| < \varepsilon$.

Fijémonos que si $|x_n - x| < \varepsilon$, entonces

$$-\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \quad \text{y} \quad x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon,$$

lo que significa que $x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ y tenemos la definición en términos de bolas.

En los espacios métricos, en caso de existir, el límite de una sucesión es único.

Teorema 2.6.4. *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente en un espacio métrico (X,d), su límite es único.*

DEMOSTRACIÓN. - Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene dos límites distintos $x \neq y$. Según el Teorema 1.3.4, X es un espacio de Haussdorff y, por tanto existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap B(y,r) = \varnothing$.

Por otra parte, como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x, tenemos que dado $r > 0$, existe n_1 tal que si $n \geq n_1$, entonces $x_n \in B(x,r)$; además como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a y, dado $r > 0$, existe n_2 tal que si $n \geq n_2$, entonces $x_n \in B(y,r)$; si tomamos $n \geq n_1$ y a la vez $n \geq n_2$ se verifican ambas condiciones a la vez y $x_n \in B(x,r)$ y $x_n \in B(y,r)$, lo que contradice que la intersección de estas dos bolas es vacía.

□

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.2.20}}$ Considere $\mathbb{R}$ con la distancia usual.

(a) Demuestre que la sucesión de números reales $(1/n)_n$, con la distancia usual, converge a cero.

(b) Demuestre que si $(x_n)_n$ es una sucesión de números reales no negativos tal que $x_n \leq 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_n x_n = 0$.

P.2.21 Toda sucesión convergente en un espacio métrico (X, d), es un conjunto acotado. [I]

El siguiente resultado caracteriza la convergencia de sucesiones en espacios métricos, a través de la convergencia de sucesiones de números reales no negativos del siguiente modo.

Teorema 2.6.5. *Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Entonces $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x si, y sólo si, la sucesión $(d(x_n, x))_{n=1}^{\infty}$ de las distancias, converge a 0 en $(\mathbb{R}, |\ |)$.*

DEMOSTRACIÓN. - Se trata de una consecuencia directa de la definición de sucesión convergente. $\square$

La convergencia de sucesiones, en los espacios métricos, caracteriza algunos de los conjuntos destacados que se han estudiado en las secciones anteriores, así como otros conceptos topológicos. De ahí su importancia.

Proposición 2.6.6. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ tal que $x_n \to x$.*

DEMOSTRACIÓN. -

"$\Rightarrow$" Supongamos que $x \in \overline{A}$. Entonces tenemos que $B(x, 1/n) \cap A \neq \varnothing$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Podemos construir entonces una sucesión de la siguiente forma:

- Para $n = 1$ tomamos $x_1 \in B(x, 1) \cap A$.
- Para $n = 2$ tomamos $x_2 \in B(x, 1/2) \cap A$.
- Y así sucesivamente: para cada n tomamos $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$.

De esta manera obtenemos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos de A que converge a x puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $d(x_n, x) < 1/n$. Por tanto según hemos visto en el Problema **P.2.20**, la sucesión $(d(x_n, x))_n$ converge a cero lo que implica por el Teorema 2.6.5 que $x_n \longrightarrow x$.

"$\Leftarrow$" Si existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en A tal que $\lim_n x_n = x$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, n_0 tal que $n > n_0$ implica que $x_n \in B(x, \varepsilon)$, es decir, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Por tanto, $x \in \overline{A}$. $\square$

Proposición 2.6.7. *Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subset X$ entonces $x \in \overset{\circ}{A}$ si, y sólo si dada una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X tal que $\lim_n x_n = x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $x_n \in A$.*

DEMOSTRACIÓN. -

"$\Rightarrow$" Si $x \in \overset{\circ}{A}$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$; y si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge a x, dado $r > 0$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces se tiene que $x_n \in B(x, r) \subset A$.

"$\Leftarrow$" Recíprocamente, si para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a x todos los términos a partir de un x_{n_0} están en A y, razonando por reducción al absurdo, suponemos que $x \notin \overset{\circ}{A}$, significa que cualquier bola de centro x contiene puntos que no son de A. Podemos construir entonces una sucesión

- Para $n = 1$ tomamos $x_1 \in B(x, 1)$, $x_1 \notin A$.
- Para $n = 2$ tomamos $x_2 \in B(x, 1/2)$, $x_2 \notin A$.
- Sucesivamente, para n, tomamos $x_n \in B(x, 1/n)$ y $x_n \notin A$

La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ así construida, converge a x puesto que $d(x, x_n) < 1/n$ para cada n pero sin embargo no tiene ninguno de sus términos en A, lo que nos lleva a una contradicción. $\square$

Como consecuencia inmediata de los dos últimos resultados tenemos el siguiente corolario donde se caracterizan los abiertos y los cerrados.

Corolario 2.6.8. *Sea (X, d) un espacio métrico. Se cumplen:*

(a) Un subconjunto $A \subset X$ es cerrado si, y sólo si $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ es una sucesión convergente, entonces $lim_n x_n \in A$.

(b) $A \subset X$ es abierto si, y sólo si para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X que converge a un punto $x \in A$, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica que $x_n \in A$.

Respecto a los puntos de acumulación y los puntos frontera, los resultados correspondientes están enunciados en los dos siguientes ejercicios, cuya demostración debe hacer con detalle.

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.2.22}}$ Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Un punto $x \in X$ es $x \in \operatorname{Fr} A$ si, y sólo si, existen sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en A e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $X - A$ tales que $x_n \to x$ e $y_n \to x$. [I]

$\boxed{\textbf{P.2.23}}$ Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Un punto $x \in X$ es $x \in A'$ si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ de términos distintos dos a dos convergente a x. [I] [R]

2.6.1. Subconjuntos densos y espacios separables

Concluimos este capítulo con la definición de conjunto denso y el estudio de algunas de sus propiedades. Este tipo de conjuntos desempeñan un papel importante en la topología de los espacios métricos y dan motivo para definir el concepto de espacio separable.

Definición 2.6.9. *Sea (X,d) un espacio métrico. Diremos que un subconjunto $A \subset X$ es **denso** en X si $\overline{A} = X$.*

Los subconjuntos densos pueden ser caracterizados de la siguiente forma.

Proposición 2.6.10. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces A es denso en (X,d) si, y sólo si, $B \cap A \neq \varnothing$ para todo abierto $B \in X$.*

DEMOSTRACIÓN. -

"$\Rightarrow$" Supongamos que $A \subset X$ es denso, es decir, $\overline{A} = X$ y sea $B \neq \varnothing$ un abierto. Si $x \in X$, como $x \in \overline{A} = X$ y B es entorno de x se cumple, por la definición de adherencia, que $B \cap A \neq \varnothing$.

"$\Leftarrow$" Supongamos ahora que todo abierto $B \neq \varnothing$ satisface $B \cap A \neq \varnothing$. En particular ocurre que para cada $x \in X$, cualquier bola abierta $B(x,r)$ verifica $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$, lo que signitica que $x \in \overline{A}$; es decir $\overline{A} = X$. □

Ejemplos

Ej.2.19. El conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ con la distancia usual según la Proposición 2.6.10, pues cualquier intervalo abierto no vacío (a,b) contiene números racionales. Por tanto, $\mathbb{R}$ contiene un subconjunto numerable denso.

Por la misma razón los irracionales $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ también son un subconjunto denso en $\mathbb{R}$.

Ej.2.20. En $\mathbb{R}$ con la distancia usual, podemos considerar el subespacio $(0,1)$; el conjunto de los racionales contenidos en $(0,1)$, es decir $\mathbb{Q} \cap (0,1)$, es denso en $(0,1)$. En efecto, según la Proposición 2.2.8, se obtiene el resultado buscado puesto

$$\overline{\mathbb{Q}}^{(0,1)} = \overline{\mathbb{Q}} \cap (0,1) = \mathbb{R} \cap (0,1) = (0,1).$$

Las sucesiones nos permiten caracterizar los subconjuntos denso de la siguiente manera.

Proposición 2.6.11. *Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto. Entonces A es denso en X si, y sólo si, para todo $x \in X$ existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en A tal que $x_n \to x$.*

DEMOSTRACIÓN. Simplemente hay que tener en cuenta la Definición 2.6.9 de conjunto denso y la Proposición 2.6.6. □

Los subconjuntos numerables densos juegan en la topología un papel importante, de hecho los espacios que poseen un conjunto de este tipo reciben un nombre propio.

Definición 2.6.12. *Un espacio métrico (X, d) es **separable** si contiene un subconjunto numerable denso.*

Ejemplos

Ej.2.21. La recta real $\mathbb{R}$ con la distancia usual es separable, puesto que $\mathbb{Q}$ es numerable y denso, como hemos visto.

Teorema 2.6.13. *Sea (X, d) un espacio métrico separable; entonces toda familia de abiertos disjuntos entre sí es numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Como el espacio es separable, existe un conjunto $A \subset X$ numerable y denso. Si $\{B_i\}_{i\in I}$ es una familia de abiertos en X que son disjuntos entre sí, se tiene que $A \cap B_i \neq \varnothing$ según la Proposición 2.6.10; y además $A \cap B_i$ es numerable. Por otra parte, para cada $i, j \in I$ se tienen $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \varnothing$. Entonces, como A es numerable, también lo es la familia $\{A \cap B_i\}_{i\in I}$ y esta familia se puede poner, claramente en correspondencia biyectiva con $\{B_i\}_{i\in I}$, lo que significa que también esta última familia es numerable. □

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.2.24}}$ Demuestre que dos distancias d y d' sobre un conjunto X son equivalentes si, y sólo si, se verifica la propiedad siguiente:

Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}x \subset X$ converge a $x \in X$ en (X, d) si, y sólo si converge a x en (X, d'). [I] [R]

P.2.25 Considere en $\mathbb{R}^2$, con la distancia usual el conjunto

$$M = \{(1/n, y) \in \mathbb{R}^2 : n = 1, 2, \dots; y \in [0, 1]\}.$$

Calcule el interior y la adherencia de M (con la adecuada justificación).

P.2.26 Sea $C \subset \mathbb{R}$ cerrado y acotado con la topología usual. Entonces C está contenido en un intervalo $[a, b]$ de manera que $a, b \in C$. [I] [R]

P.2.27 Considere el siguiente subconjunto de la recta real

$$A = [0, 1) \cup (1, 3) \cup \{5\},$$

con la topología $\mathcal{T}_A$ inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

(a) Estudie si $\{5\}$ es abierto o cerrado en A.
(b) Estudie si $(1, 3)$ es abierto o cerrado en A.
(c) Calcule la adherencia de $[0, 1)$ en A.
(d) Estudie si $[0, 1/2]$ es un entorno de 0 en A.

P.2.28 Sean A y B dos subconjuntos cerrados disjuntos en un espacio métrico (X, d). Entonces existen dos abiertos disjuntos G y H tales que $A \subset G$ y $B \subset H$. [I] [R]

P.2.29 Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto de X. Se dice que A es **fronterizo** cuando $A \subset \mathrm{Fr}(A)$ y que A es **raro** cuando $\overset{\circ}{\overline{A}} = \varnothing$.

(a) ¿Es cierto que A es fronterizo si, y sólo si, $\overset{\circ}{A} = \varnothing$?
(b) ¿Es cierto que A es fronterizo si, y sólo si, el complementario de A es denso en X?
(c) Encuentre en $(\mathbb{R}, d_u)$ dos ejemplos de conjuntos fronterizos.
(d) Encuentre en $(\mathbb{R}, d_u)$ dos ejemplos de conjuntos raros.
(e) ¿Todo conjunto raro es fronterizo?
(f) ¿Todo conjunto fronterizo es raro?
(g) ¿A abierto implica que $\mathrm{Fr}(A)$ es raro?
(h) ¿Todo conjunto cerrado y raro es la frontera de un conjunto abierto? [I]

P.2.30 Sea (X, d) un espacio métrico:

(1) Demuestre que $D \subset X$ es denso en X si, y sólo si, $X - D$ tiene interior vacío.

(2) Pruebe que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ con la topología usual es denso en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, todo punto de $\mathbb{R}$ es límite de una sucesión de puntos de A.

(3) Sea la sucesión $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$. Pruebe que $\mathbb{R} - \{(1/n)_{n=1}^{\infty}\}$ es denso en $\mathbb{R}$ y que la sucesión no es densa en $\mathbb{R}$.

P.2.31 Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y el producto $X \times Y$ dotado de la distancia $d((x, y), (x', y')) = \text{máx}\{d(x, x'), d'(y, y')\}$. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones en X e Y respectivamente, demuestre que la condición necesaria y suficiente para que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converja a $x \in X$ y la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converja a $y \in Y$ es que la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $X \times Y$, converja a $z = (x, y) \in X \times Y$.

P.2.32 Considere los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y calcule su interior, exterior, frontera y adherencia primero considerando la distancia discreta y después la distancia usual.

$$(0, 1), \quad [0, 1], \quad \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad \mathbb{Q}$$