3

Funciones continuas

De entre todas las aplicaciones que pueden definirse entre dos espacios métrico, las aplicaciones continuas ocupan un papel preponderante. Su estudio es fundamental no sólo en topología, sino también en análisis, geometría diferencial y en general, en la mayoría de ramas de las matemáticas.

En este capítulo estudiamos la continuidad de funciones entre espacios métricos. Caracterizamos las continuidad a través de sucesiones, de conjuntos abiertos o de conjuntos cerrados, y presentamos las principales propiedades de las aplicaciones continuas. Estudiamos algunas aplicaciones especiales: abiertas, cerradas y homeomorfismos. Finalizamos estudiando la continuidad uniforme en espacios métricos.

Se pretenden alcanzar las siguientes competencias específicas:

- Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de espacio métrico.
- Reconocer y utilizar las propiedades sencillas de la topología métrica.
- Determinar cuándo una función entre espacios métricos es continua y, en particular, cuándo es un homeomorfismo.
- Saber caracterizar diferentes propiedades y conceptos topológicos mediante el uso de sucesiones, particularmente la continuidad.

Se desarrollarán los contenidos siguientes:

- Continuidad de funciones entre espacios métricos. Continuidad en un punto. Continuidad global.

- Caracterización de la continuidad mediante sucesiones.
- Principales propiedades de las aplicaciones continuas.
- Aplicaciones abiertas, cerradas y homeomorfismos.
- Aplicaciones continuas en subespacios.
- Continuidad uniforme.
- Isometrías.

3.1. Aplicación continua

Definición 3.1.1. *Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Diremos que f es* ***continua en*** $a \in X$*, si*

$$\text{para cada } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } d(x, a) < \delta, \text{ implica } d'(f(x), f(a)) < \varepsilon;$$

en otras palabras

$$\text{para cada } B_Y(f(a), \varepsilon), \text{ existe } B_X(a, \delta) \text{ tal que } f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \varepsilon).$$

Observación 3.1.2. *Lógicamente, coincide con la definición, ya conocida, de función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in \mathbb{R}$, es decir, f es continua en a si*

$$\text{para cada } \varepsilon > 0, \text{ existe } \delta > 0 \text{ tal que } |x - a| < \delta, \text{ implica } |f(x) - f(a)| < \varepsilon;$$

que en términos de entornos (bolas) es:

$$\text{para cada } \varepsilon > 0, \text{ existe } (a-\delta, a+\delta) \text{ tal que } f((a-\delta, a+\delta)) \subset (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon).$$

Ejemplos

Ej.3.1. Toda aplicación constante entre dos espacios métricos (X, d) y (Y, d') es continua. En efecto, si $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$, es evidente que toda bola $B_Y(y_0, r)$ contiene a $f(X) = \{y_0\}$ y por tanto cumple la definición.

Ej.3.2. La aplicación identidad $1_X : (X, d) \longrightarrow (X, d)$, de un espacio en sí mismo, es continua en cada punto $x \in X$, pues $B(1_X(x), r) = B(x, r)$. ¿Y si las distancias son diferentes, es decir, si ahora consideramos la aplicación $1_X : (X, d) \longrightarrow (X, d')$ con $d' \neq d$?

Ej.3.3. Si (X, d_D) es un espacio discreto e (Y, d) es un espacio métrico cualquiera, entonces toda aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es continua en cada punto $x \in X$, ya que si consideramos una bola $B_d(f(x), r)$, basta con que tomemos la bola $B_{d_D}(x, 1/2) = \{x\}$ para que $f(B_{d_D}(x, 1/2)) \subset B_d(f(x), r)$. ¿Ocurre lo mismo si la aplicación es $f : Y \longrightarrow X$?

Ej.3.4. El concepto de continuidad es conocido en $\mathbb{R}$, lo que nos proporciona numerosos e interesantes ejemplos de aplicaciones $f : (\mathbb{R}, |\,|) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\,|)$ continuas como son las funciones elementales x^a, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, e^x y sus inversas en sus dominios de definición. De la misma forma sabemos que la suma y el producto de funciones continuas da como resultado una función continua; así como la inversa de una función continua no nula.

Las sucesiones caracterizan la continuidad en los espacios métricos, convirtiéndose así, en una herramienta frecuentemente útil. Lo vemos en el siguiente Teorema.

Teorema 3.1.3. *Sean dos espacios métricos (X, d) e (Y, d'), $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre ellos y $a \in X$. Entonces son equivalentes:*

(a) *f es continua en a.*

(b) *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en X con límite a, entonces $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ es convergente y su límite es $f(a)$.*

DEMOSTRACIÓN. -

"$\Rightarrow$" Supongamos que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(a)$ y f no es continua en a. Esto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ hay un punto $x_\delta \in X$ tal que $d(x_\delta, a) < \delta$ y $d'(f(x_\delta), f(a) \geq \varepsilon$. Entonces:

- Dado $\delta = 1$ existe x_1 con $d(x_1, a) < 1$ tal que $d'(f(x_1), f(a)) \geq \varepsilon$.
- Dado $\delta = \frac{1}{2}$ existe x_2 con $d(x_2, a) < \frac{1}{2}$ tal que $d'(f(x_2), f(a)) \geq \varepsilon$.
- Y así sucesivamente:
  dado $\delta = \frac{1}{n}$ existe x_n con $d(x_n, a) < \frac{1}{n}$ tal que $d'(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$.

Hemos obtenido una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en X que converge hacia a, puesto que la sucesión de términos positivos $(d(x_n, a))_{n=1}^{\infty}$ converge a 0; sin embargo, la sucesión $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ no converge a $f(a)$, ya que siempre es $d'(f(x_n), f(a)) \geq \varepsilon$, para cada $n \in \mathbb{N}$, con lo que llegamos a una contradicción.

"$\Leftarrow$" Recíprocamente, supongamos que f es continua en $a \in X$ y que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es $x_n \to a$. Para demostrar que $f(x_n) \to f(a)$, tenemos que probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $f(x_n) \in B_Y(f(a), \varepsilon)$. Como f es continua en a, dada $B_Y(f(a), \varepsilon)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \varepsilon).$$

Por otra parte, como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge hacia a, dado $B_X(a, \delta)$, existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $x_n \in B_X(a, \delta)$, con lo que

$$f(x_n) \in f(B_X(a, \delta)) \subset B_Y(f(a), \varepsilon),$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

Ejemplos

Ej.3.5. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

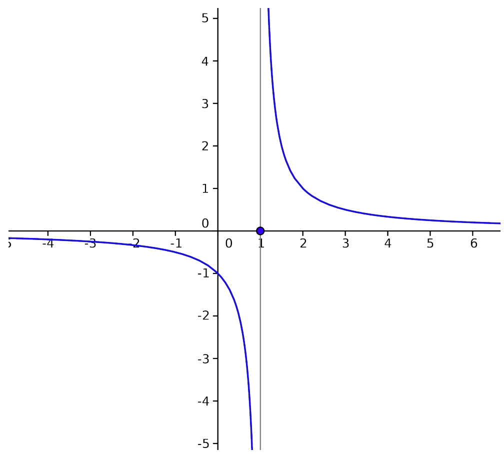

Figura 3.1 – Gráfica de la función $f(x)$ del Ejemplo **Ej.3.5.**.

considerando la distancia usual en ambos casos (véase la Figura 3.1), no es continua en $x = 1$, pues la sucesión $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ tiene por límite 1 y, sin embargo,

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n \frac{1}{\frac{1}{n} + 1 - 1} = \lim_n n \neq f(1).$$

La composición de aplicaciones continuas es también una aplicación continua. Encontramos, por tanto, un interesante método para construir numerosas aplicaciones de este tipo.

Proposición 3.1.4. *Sean (X, d), (Y, d') y (Z, d'') tres espacios métricos, y sean dos aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ tales que f es continua en $a \in X$ y g es continua en $f(a) \in Y$. Entonces $g \circ f$ es continua en a.*

DEMOSTRACIÓN. -

Sea $\varepsilon > 0$; como g es continua en $f(a)$, existe $\delta > 0$ tal que si $d'(f(a), y) < \delta$, entonces $d''(g(f(a)), g(y)) < \varepsilon$. Por otra parte, como f es continua en a, dado el $\delta > 0$ anterior, existe $\eta > 0$ de modo que si $d(x, a) < \eta$, entonces $d'(f(a), f(x)) < \delta$. Para concluir la prueba sólo hay que combinar las dos afirmaciones anteriores. $\square$

3.1.1. Continuidad global

Definición 3.1.5. *Sean dos espacios métricos (X, d) e (Y, d') y sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Diremos que f es* ***continua*** *si lo es en todo punto de X.*

La Proposición siguiente una caracterización de la continuidad global en términos de los conjuntos abiertos y de los conjuntos cerrados. Se trata de un importante resultado que, además será de utilidad frecuente.

Proposición 3.1.6. *Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Entonces son equivalentes:*

(a) *f es continua.*

(b) *Para todo abierto $A \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(A)$ es abierto en X.*

(b) *Para todo cerrado $F \subset Y$, el conjunto $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.*

DEMOSTRACIÓN. -

"(a)⇒(b)" Supongamos que f es continua y que $A \subset Y$ es un abierto. Veamos que $f^{-1}(A)$ es abierto. Sea $x \in f^{-1}(A)$, entonces $f(x) \in A$ y como A es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_Y(f(x), \varepsilon) \subset A$. Por otra parte, como f es continua, para este $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \varepsilon) \subset A$, lo que significa que $B_X(x, \delta) \subset f^{-1}(A)$. Como esto es para cada $x \in f^{-1}(A)$, tenemos que $f^{-1}(A)$ es abierto en X.

"(b)⇒(c)" Si $F \subset Y$ es cerrado, entonces su complementario $Y - F$ es abierto y por tanto $X - f^{-1}(F) = f^{-1}(Y - F)$ es abierto, de donde se deduce que $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.

"(c)⇒(a)" Consideremos $f(x) \in Y$ y una bola abierta $B_Y(f(x), \varepsilon)$; entonces el conjunto $Y - B_Y(f(x), \varepsilon)$ es cerrado en Y, por tanto

$$X - f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon)) = f^{-1}(Y - B_Y(f(x), \varepsilon))$$

es cerrado en X, lo que significa que $f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon))$ es abierto en X y entonces, para algún $\delta > 0$ se tienen que $B_X(x, \delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x), \varepsilon))$; de donde deducimos que $f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \varepsilon)$ y f es continua en x. □

Aunque las anti-imágenes, mediante una aplicación continua, de un abierto o de un cerrado, son a su vez, abierto o cerrado respectivamente, las imágenes de abiertos o de cerrados no son, en general, abiertos o cerrados. Veamos un ejemplo.

Ejemplos

Ej.3.6. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, es continua para la topología usual y, sin embargo no transforma abiertos en abiertos pues $f((-2\pi, 2\pi)) = [-1, 1]$ no es un abierto en $\mathbb{R}$.

Ej.3.7. En el Ejemplo **Ej.3.3.**, hemos visto que toda aplicación entre un espacio discreto y cualquier otro espacio métrico es siempre continua. En particular, la aplicación identidad $1_X : (\mathbb{R}, d_D) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$, es continua. Cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ es cerrado para la topología discreta, por ejemplo $(0, 1)$; y sin embargo, $1_X(0, 1) = (0, 1)$ no es cerrado en $\mathbb{R}$ con la topología usual, de modo que esta aplicación no transforma cerrados en cerrados.

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.3.1}}$ Si A es un subespacio de un espacio métrico (X, d), demuestre que la función *inclusión* $j : (A, d_A) \longrightarrow (X, d)$ $(j(x) = x)$ es continua. [I] [R]

$\boxed{\textbf{P.3.2}}$ Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una aplicación.

(a) Demuestre que f es continua en un punto $a \in X$ si, y sólo si, para todo entorno U de $f(a)$ se cumple que $a \in [f^{-1}(U)]^\circ$

(b) Demuestre que f es continua en X si, y sólo si, para todo conjunto $B \subset Y$ se cumple

$$f^{-1}(\overset{\circ}{B}) \subset [f^{-1}(B)]^\circ.$$

[I] [R]

$\boxed{\textbf{P.3.3}}$ Sea (X, d) un espacio métrico y $x_0 \in X$ un punto. Demuestre que la aplicación $f : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$ definida como $f(x) = d(x, x_0)$, es continua. [I]

$\boxed{\textbf{P.3.4}}$ Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto no vacío determinado. Demuestre que $g : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$ definida como $g(x) = d(x, A)$, es continua. [I]

$\boxed{\textbf{P.3.5}}$ Sea (X, d) un espacio métrico y $f_1, \ldots, f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, una colección de n funciones continuas (considerando $\mathbb{R}$ con la distancia usual). Entonces la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ también con la distancia usual) definida como $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ continua.

3.1.2. Continuidad y subespacios

Proposición 3.1.7. *Si $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ es continua y A es un subespacio de X, entonces la función restringida $f|_A : (A, d_A) \longrightarrow (Y, d')$ es continua.*

DEMOSTRACIÓN. -

Como en el ejercicio (3.1) hemos visto que la inclusión j es continua y la funcion $f|_A$ se puede expresar como $f|_A = f \circ j$, es composición de aplicaciones continuas y, por tanto, $f|_A$ es continua. $\square$

Definición 3.1.8. *Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una aplicación y $A \subset X$ un subconjunto. Diremos que f es continua en A si $f|_A : (A, d_A) \longrightarrow (Y, d')$ es continua.*

3.2. Homeomorfismos y embebimientos

3.2.1. Aplicaciones abiertas y cerradas

Hemos visto que aunque la imagen inversa de un conjunto abierto, mediante una función continua, es un abierto (lo mismo ocurre para cerrados), las imagenes de abiertos o de cerrados no son, necesariamente, abiertos o cerrados respectivamente. Las aplicaciones que transforman abiertos en abiertos o cerrados en cerrados, juegan un papel importante.

Definición 3.2.1. *Sean dos espacios métricos (X, d) e (Y, d') y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Diremos que f es **abierta** si para todo abierto $A \subset X$, $f(A)$ es abierto en Y y diremos que f es **cerrada** si para todo $C \subset X$ cerrado, $f(C) \subset Y$ es cerrado.*

Ejemplos

Ej.3.8. Consideremos $\mathbb{R}$ con la topología usual y $[0, 1]$ con distancia inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Entonces la aplicación inclusión $j : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ es cerrada puesto que al ser cerrado $[0, 1]$, todos los cerrados en este espacio también son cerrados en $\mathbb{R}$ (vea la Proposición 1.3.14) y, sin embargo no es abierta pues $[0, 1/2)$ es abierto (¿por qué?) en $[0, 1]$ pero no en $\mathbb{R}$.

Ej.3.9. Las aplicaciones pueden ser abiertas y cerradas a la vez; en efecto la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (en ambos casos con la distancia usual), definida como $f(x) = kx$ con $k \in \mathbb{R}$, no nulo, es continua, es abierta y cerrada.

Ej.3.10. Las aplicaciones abiertas y/o cerradas no son, necesariamente, continuas. Consideremos el espacio $X = \{a, b\}$, formado por dos únicos puntos con la distancia discreta d_D; y sea la aplicación $f : (\mathbb{R}, |\ |) \longrightarrow X$, definida como

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \geq 0 \\ b & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Es fácil (¿?) ver que es abierta y cerrada. Sin embargo no es continua, pues el conjunto $\{a\}$ es abierto y cerrado en X y $f^{-1}(\{a\}) = [0, \infty)$ no es abierto en $\mathbb{R}$, con lo que la Proposición 3.1.6 no se verifica.

Ej.3.11. La proyección $\pi : (\mathbb{R}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ del plano sobre el eje de abcisas,

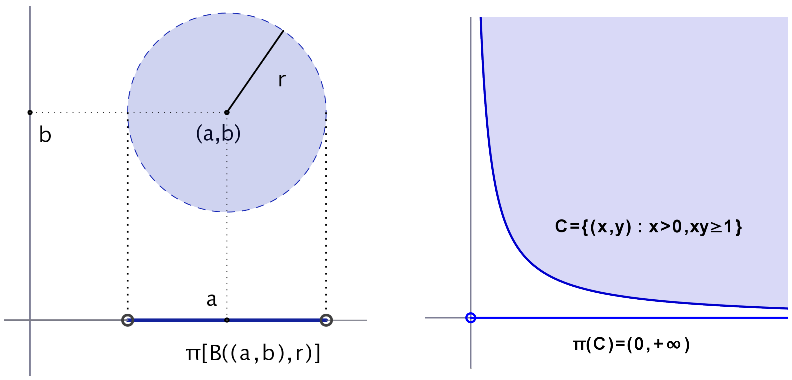

Figura 3.2 – Las proyecciones son aplicaciones abiertas pero no cerradas.

$\pi(x, y) = x$, es una aplicación abierta puesto que la proyección de cualquier bola abierta $B((a, b), r)$ es un intervalo abierto $(a - r, a + r)$. Pero no es cerrada, puesto que la proyección del conjunto cerrado

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ xy \geq 1\}$$

es el intervalo $(0, +\infty)$, que no es cerrado (véase la Figura 3.2).

3.2.2. Homeomorfismos

Vamos a estudiar ahora unas importantes aplicaciones continuas entre espacios métricos.

Definición 3.2.2. *Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos. Un* ***homeomorfismo*** *entre X e Y es una aplicación biyectiva $f : X \to Y$ tal que tanto f como su inversa f^{-1} son continuas. Diremos que dos espacios topológicos son* ***homeomorfos*** *si existe un homeomorfismo entre ellos.*

Diremos que una propiedad en un espacio topológico es una ***propiedad topológica*** *si es invariante por homeomorfismos.*

La siguiente proposición proporciona una caracterización de los homeomorfismos.

Proposición 3.2.3. *Sea $f : X \to Y$ una aplicación biyectiva entre dos espacios métricos (X, d) e (Y, d'). Son equivalentes:*

(a) *f es un homeomorfismo.*

(b) *Un subconjunto $A \subset X$ es abierto si, y sólo si, $f(A)$ es abierto.*

(c) *Un subconjunto $C \subset X$ es cerrado si, y sólo si, $f(C)$ es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. -

Es consecuencia directa de la definición y de la Proposición 3.1.6. □

Veamos ejemplos de homeomorfismos entre espacios topológicos. Algunos nos van a resultar útiles e incluso, quizás, hasta sorprendentes.

Ejemplos

Ej.3.12. Dos espacios métricos discretos son homeomorfos si, y sólo si, existe una biyección entre ellos.

Ej.3.13. La aplicación $\operatorname{sen} : (0, \pi/2) \to (0, 1)$ es un homeomorfismo, ya que restringida a estos intervalos es biyectiva, y también es continua su aplicación inversa $\operatorname{arcsen} : (0, 1) \to (0, \pi/2)$ (véase la Figura 3.3).

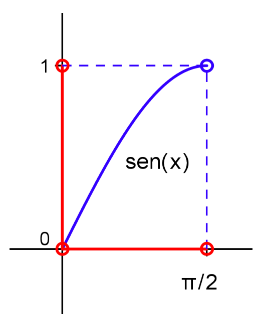

Figura 3.3 – El $\operatorname{sen} x$ es un homeomorfismo entre $(0, \pi/2)$ y $(0, 1)$.

Ej.3.14. La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x + 1$ es un homeomorfismo (véase la Figura 3.4). Si definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la ecuación

$$g(y) = \frac{1}{3}(y - 1)$$

entonces se puede comprobar fácilmente que, para todos los números reales x e y, $f(g(y)) = y$ y que $g(f(x)) = x$. Se sigue que f es biyectiva y que $g = f^{-1}$; la continuidad de f y g es un resultado conocido de análisis.

Ej.3.15. La función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$$

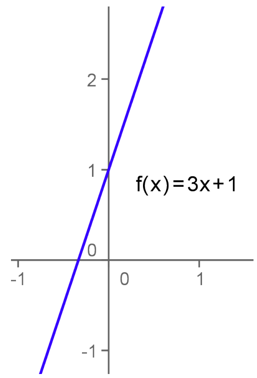

Figura 3.4 – Homeomorfismo en la recta real.

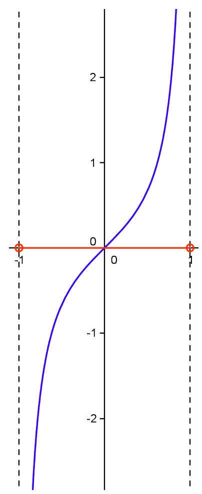

Figura 3.5 – Ejemplo de homeomorfismo entre un intervalo abierto y $\mathbb{R}$.

es un homeomorfismo (véase la Figura 3.5).

En primer lugar, observemos que f es una correspondencia biyectiva que conserva el orden; su inversa es la función g definida por

$$g(y) = \frac{2y}{1 + (1 + 4y^2)^{1/2}}.$$

El hecho de que f sea un homeomorfismo se puede probar usando la continuidad de las funciones algebraicas y la función raíz cuadrada. En efecto, tanto f como g son continuas al ser composición de funciones continuas.

Ej.3.16. El hecho de ser acotado no es una propiedad topológica. El intervalo $(-1, 1)$ y $\mathbb{R}$ son topológicamente equivalentes (como se prueba en el Ejemplo (3) anterior) pero el primero de ellos está acotado y el segundo no.

Ej.3.17. Una función biyectiva puede ser continua sin ser un homeomorfismo. Denotemos por S^1 a la circunferencia unidad

$$S^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

considerado como subespacio del plano $\mathbb{R}^2$, y sea

$$f : [0, 1) \longrightarrow S^1$$

la aplicación definida por $f(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. Entonces f es biyectiva y continua (véase el Problema **P.3.5**), pero no es un homeomorfismo.

El hecho de que f sea biyectiva y continua se sigue de propiedades familiares de las funciones trigonométricas, que ya suponemos conocidas. Pero la función f^{-1} no es continua ya que, por ejemplo, la imagen mediante $f = (f^{-1})^{-1}$ del conjunto abierto $U = [0, \frac{1}{4})$ del dominio no es abierta en S^1, puesto que el punto $p = f(0)$ no pertenece a ningún conjunto abierto V de $\mathbb{R}^2$ tal que $V \cap S^1 \subset f(U)$ (véase la Figura 3.6).

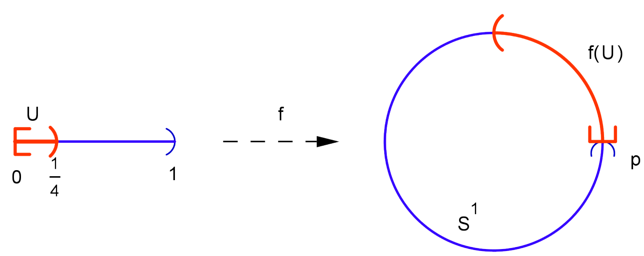

Figura 3.6 – Ejemplo de aplicación biyectiva que no es homeomorfismo.

Ejercicios y Problemas

P.3.6 Sea la aplicación $f : (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ definida por

$$f(x) = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

¿Es abierta? ¿Es cerrada? Justifíquelo.

P.3.7 Estudie la continuidad de la función “valor absoluto” $|\ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (distancia usual). ¿Es homeomorfismo?

P.3.8 Encuentre un homeomorfismo entre el intervalo (a, b) de $\mathbb{R}$ y el propio $\mathbb{R}$, con las topologías usuales. Idem para los intervalos $[a, b]$ y $[0, 1]$. [I] [R]

$\boxed{\textbf{P.3.9}}$ Sea $(a, b) \in X \times Y$. Demuestre que la "rebanada horizontal" $X \times b$ es homeomorfa a X, y que la "rebanada vertical" $a \times Y$ es homeomorfa a Y con la topología usual definida para el producto de espacios (vea el Ejemplo **Ej.1.9.**).

$\boxed{\textbf{P.3.10}}$ Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow y$ una aplicación. Demuestre:

(a) f es cerrada si, y sólo si, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ para todo $A \subset X$.

(b) f es abierta si, y sólo si, $f(\overset{\circ}{A}) \subset [f(A)]^{\circ}$ para todo $A \subset X$. [I] [R]

$\boxed{\textbf{P.3.11}}$ Pruebe que las siguientes son propiedades topológicas: *(i)* punto de acumulación; *(ii)* interior; *(iii)* frontera; *(iv)* desidad y *(v)* entorno. [I] [R]

$\boxed{\textbf{P.3.12}}$ Sean (X, d), (Y, d') y (Z, d'') tres espacios métricos y dos funciones continuas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$. Si $g \circ f : X \longrightarrow Z$ es un homeomorfismo, demuestre:

(a) Si g es inyectiva, entonces f y g son homeomorfismos.

(b) Si f es sobreyectiva, entonces f y g son homeomorfismos. [I] [R]

3.2.3. Embebimientos

Ahora supongamos que $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ es una aplicación continua e inyectiva. La $f$función $\bar{f} : X \longrightarrow f(X)$, donde $f(X) \subset Y$ tiene la topología inducida, obtenida al restringir el rango de f, es biyectiva. Si ocurre que $\bar{f}$ es un homeomorfismo de X con $f(X)$, decimos que la aplicación $f : X \to Y$ es un ***embebimiento topológico***, o simplemente un ***embebimiento***, de X en Y.

Ejemplos

Ej.3.18. La aplicación $\mathrm{sen} : (0, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$ es claramente un embebimiento.

Ej.3.19. La aplicación $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/x$, es un embebimiento, ya que $\bar{f} : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ es un homeomorfismo.

Ej.3.20. Consideremos la función $g : [0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ obtenida a partir de la función f del Ejemplo **Ej.3.17.** al extender el recorrido. La aplicación g es un ejemplo de una aplicación continua e inyectiva que no es un embebimiento.

3.3. Continuidad uniforme

En la Definición 3.1.1 de continuidad que venimos manejando, el número real δ depende de ε y, en general, también depende del punto en el que estamos "estudiando" la continuidad. No obstante, hay casos en los que esto último no ocurre y δ sólo de pende de ε. Observemos los siguientes ejemplos.

Ejemplos

Ej.3.21. Consideremos la conocida parábola. Se trata de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (distancias usuales), definida como $f(x) = x^2$. Sabemos que esta aplicación es continua y si tomamos $\varepsilon = 10^{-2}$ y estudiamos la continuidad en $a = 0$, basta tomar $|x| < \sqrt{10^{-2}} = 10^{-1}$, para que $|x^2| < \varepsilon = 10^{-2}$. Sin embargo si pensamos en $a = 3$ y tomamos el mismo valor $\varepsilon = 10^{-2}$, tenemos que si $x = 3 + 10^{-1}/2 = 3 + 1/20$, entonces $|x - 3| = 1/20 < 1/10$ y, sin embargo,

$$|x^2 - 3^3| = |x^2 - 9| = |x - 3||x + 3| = (1/20)(6 + 1/20) = 121/400 > 10^{-2}.$$

Es decir el valor de δ tomado para $a = 0$ no es válido para el punto $a = 3$.

Ej.3.22. Consideremos ahora la aplicación $f(x) = x + 3$, y sea $\varepsilon > 0$ observemos que para $x = a$, para que

$$|f(x) - f(a)| = |x + 3 - a - 3| = |x - a| < \varepsilon,$$

basta tomar $\delta = \varepsilon$, y esto es válido para cualquier punto $x = a$.

Las aplicaciones que tienen esta última, digamos, "peculiaridad" reciben un nombre particular.

Definición 3.3.1. *Una aplicación entre espacios métricos $f : (X, d) \to (Y, d')$ es **uniformemente continua** si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$ con $d(x, y) < \delta$ se verifica que $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Observación 3.3.2. Es fácil probar que toda aplicación uniformemente continua es continua, pero el recíproco no es cierto: basta considerar la función $f(x) = x^2$ del ejemplo anterior. No obstante lo podemos hacer de forma más general. En efecto, dado $\epsilon > 0$, para todo $\delta > 0$ siempre podemos encontrar dos números x e y en $\mathbb{R}$ tales que $|x - y| < \delta$ y, sin embargo, $|x^2 - y^2| > \epsilon$. Observemos que

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y).$$

Dados ϵ y δ, tomamos x e y tales que $|x - y| = \delta/2$ y $|x + y| > 2\epsilon/\delta$, entonces

$$|x^2 - y^2| = |x - y|\,|x + y| > \epsilon.$$

3.3.1. Isometrías

Definición 3.3.3. *Dados dos espacios métricos (X, d) e (Y, d'), diremos que una aplicación biyectiva $f : X \to Y$ es una **isometría** si conserva la distancia, es decir, $d(x_1, x_2) = d'(f(x_1), f(x_2))$ para todo $x_1, x_2 \in X$. En este caso decimos que (X, d) e (Y, d') son **espacios isométricos**.*

Proposición 3.3.4. *Una isometría es una aplicación uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN. -

Se trata de una consecuencia directa de la definición. □

Proposición 3.3.5. *Si dos espacios métricos son isométricos, entonces también son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. -

De nuevo, no es más que una consecuencia de las definiciones de isometría y homeomorfismo.

□

Ejemplos

Ej.3.23. El recíproco de la última proposición no es cierto, en general; es decir no todo homeomorfismo es isometría. Si consideramos $\mathbb{R}$ con la distancia discreta d_D y con la distancia

$$\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

entonces la aplicación identidad $\mathrm{Id} : (\mathbb{R}, d_D) \to (\mathbb{R}, \tilde{d})$ es un homeomorfismo que no es isometría, pues si $x \neq y$ entonces $d_D(x, y) = 1$ mientras que $\tilde{d}(\mathrm{Id}(x), \mathrm{Id}(y)) = \tilde{d}(x, y) = 2$.

Ej.3.24. Vimos en el Ejemplo **Ej.1.5.**, que $\mathbb{C}$ es un espacio métrico con la distancia $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. La aplicación $f : (\mathbb{R}^2, d_2) \longrightarrow (\mathbb{C}, d)$ definida como $f(x, y) = x + iy$, es una isometría entre ambos espacios. Demostrarlo se reduce a una mera comprobación.

Ejercicios y Problemas

P.3.13 Se dice que una aplicación $f : (X, d) \to (Y, d')$ es de ***Lipschitz*** si existe un número real $k > 0$ tal quep, para todo $x, y \in X$,

$$d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Demuestre que una aplicación de Lipschitz es uniformemente continua.

P.3.14 Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ continua y sobreyectiva. Demuestre que si $D \subset X$ es un conjunto denso, entonces $f(D)$ también es denso en Y.

P.3.15 Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ y $a \subset X$. Demuestre que si f es continua en $\overline{A}$ y constante en A, entonces es constante en $\overline{A}$. [I] [R]

P.3.16 Demuestre que la aplicación $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, es continua en $(0, 1]$ con la distancia usual relativa, pero no es uniformemente continua.

P.3.17 Sea (X, d) un espacio métrico y $(\mathbb{R}, d_u)$.

(a) Si $a \in X$, demuestre que la aplicación $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(a, x)$ es uniformemente continua.

(b) Si $A \subset X$, demuestre que la aplicación $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = d(A, x)$ es uniformemente continua. [I]

P.3.18 Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y $f, g : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Demuestre:

(a) El conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

(b) El conjunto $\{x \in X : f(x) = a\}$, con $a \in Y$ fijo, es cerrado en X.

(c) Si $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es denso en X, entonces $f = g$.

P.3.19 Sean $(Y_1, \rho_1), \ldots, (Y_n, \rho_n)$ y (X, d) espacios métricos y una aplicación $f : X \longrightarrow Y_1 \times \cdots \times Y_n$. Demuestre que f es continua en $a \in X$ si, y sólo si, $f_i = \pi_i \circ f : X \longrightarrow Y_i$ es continua en $a \in X$ para cada $i = 1, \ldots, n$. [I]

P.3.20 Sea $f : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$. Demuestre que f es continua si, y sólo si, para cada $a \in \mathbb{R}$, son abiertos los conjuntos

$$A_a = \{x \in X : f(x) < a\} \quad \text{y} \quad B_a = \{x \in X : f(x) > a\}.$$

P.3.21 Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Si d_u es la distancia usual, d_D es la distancia discreta y $\rho(x,y) = 2|x-y|$, estudie la continuidad de la función en los siguientes casos

$$f : (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u), \quad f : (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_D),$$

$$f : (\mathbb{R}, d_D) \longrightarrow (\mathbb{R}, \rho), \quad f : (\mathbb{R}, \rho) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u).$$

P.3.22 Sea (X,d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ cerrados (o abiertos) tales que $X = A \cup B$. Sean $f : A \longrightarrow Y$ y $g : B \longrightarrow Y$ continuas. Demuestre que si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces es continua la aplicación $h : X \longrightarrow Y$ definida como

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases} \quad .$$

Estudie la continuidad de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ x/2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \leq 0 \\ x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad ,$$

$$h(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x < 0 \\ x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad .$$