5

Espacios métricos completos

Comenzamos introduciendo las sucesiones de Cauchy, que relacionamos con las sucesiones convergentes. En el caso de que coincidan, se trata de un espacio métrico completo. Estudiamos los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$ y relacionamos la completitud y la compacidad. Se estudian algunas interesantes propiedades como el teorema de encaje de Cantor y un teorema de Baire.

El concepto de completitud en $\mathbb{R}$ suele aparecer en los libros de textos de análisis matemático: es un concepto básico para todos los aspectos del análisis. La completitud es una propiedad métrica, más que una propiedad topológica, pero muchos teoremas que implican a los espacios métricos completos son de naturaleza topológica.

El ejemplo más familiar de espacio métrico completo es el espacio euclídeo con cualquiera de sus distancias usuales. Con este capítulo sólo pretendemos introducir al lector en este tema.

Se pretenden alcanzar las siguientes competencias específicas:

- Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de espacio métrico.
- Reconocer y utilizar las propiedades sencillas de la topología métrica.
- Conocer las propiedades más sencillas de los espacios métricos completos.
- Relacionar los conceptos de completitud y compacidad en los espacios métricos.

Se desarrollarán los contenidos siguientes:

- Sucesiones de Cauchy.
- Los espacios euclídeos ($\mathbb{R}^n$).
- Relación entre la completitud y la compacidad.
- Algunos resultados interesantes: teorema de encaje de Cantor, un teorema de Baire, teorema del punto fijo.
- Completado de un espacio métrico.

5.1. Sucesiones de Cauchy

Definición 5.1.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. Diremos que es una* ***sucesión de Cauchy*** *si*

dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Observación 5.1.2. *Observe que lo que viene a decir la definición es que, a partir de un término, todos los demás, están tan cerca uno de otro, como se desee.*

Ejemplos

Ej.5.1. Las únicas sucesiones de Cauchy en un espacio métrico discreto X son las de *cola* constante, es decir, aquellas sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ para las que existe un punto $a \in X$ y un número natural n_0 de tal manera que $x_n = a$ para todo $n \geq n_0$. En efecto, si la sucesión es de cola constante, entonces es claramente de Cauchy. Recíprocamente, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio discreto, tenemos que para todo ε_0 existe n_0 tal que si $n, m > n_0$ entonces $d_D(x_n, x_m) < \varepsilon$. Si tomamos $\varepsilon < 1$ se tiene que $x_n = x_m$ para todo $n, m > n_0$, lo que implica que la sucesión es de cola constante.

Ej.5.2. La sucesión $(1/n)_{n=2}^{\infty}$ es de Cauchy tanto en $(\mathbb{R}, |\ |)$ como en $((0,1), |\ |)$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $1/n < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Entonces si $n, m > n_0$ se verifica

$$d\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} < \varepsilon.$$

Ej.5.3. La sucesión $(n)_{n=1}^{\infty}$ no es de Cauchy en $(\mathbb{R}, |\ |)$. Observemos que para todo $\varepsilon > 0$ y todo número natural n_0 siempre existen números $n, m > n_0$ tales que $|n - m| > \varepsilon$.

Proposición 5.1.3. *Toda sucesión de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, en un espacio métrico (X, d), está acotada.*

DEMOSTRACIÓN. -

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy y consideremos $\varepsilon = 1$. Por la condición de Cauchy existe n_0 tal que si $m, n > n_0$ se tiene que $d(x_n, x_m) < 1$, de modo que si $n > n_0$, entonces $x_n \in B(x_{n_0+1}, 1)$. Sólo quedan un número finito de términos que pueden estar fuera de esta bola. Sea

$$r = \max\{d(x_1, x_{n_0}), \ldots, d(x_{n_0}, x_{n_0+1})\}.$$

Para todo n se cumple que $d(x_n, x_{n_0+1}) \leq r$. Así deducimos

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset B(x_{n_0+1}, r+1),$$

como queríamos. □

Proposición 5.1.4. *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. -

En efecto, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión tal que $x_n \to x$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ se cumple que $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Así pues, para todo $n, m > n_0$ se tiene

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

lo que concluye la demostración. □

Ejemplos

Ej.5.4. El recíproco de la Proposición 5.1.4 no es cierto en general. La sucesión $(1/n)_{n=2}^{\infty}$ es de Cauchy en $((0,1), |\ |)$ y, sin embargo, no converge. Esto justificará la introducción de los espacios métricos completos.

Proposición 5.1.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy que contiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge a x, entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.*

DEMOSTRACIÓN. -

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe n_1 tal que para todo $n, m > n_1$ se cumple que

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, la subsucesión $(x_{n_k})_k$ es convergente a x, luego existe k_0 tal que si $n_k > n_{k_0}$ se cumple que

$$d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideremos $n_0 = \max\{n_1, n_{k_0}\}$ y tomemos $n > n_0$ y k tal que $n_k > n_0$, entonces

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

de modo que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x. □

Ejercicios y Problemas

P.5.1 Demuestre que, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones de Cauchy en $\mathbb{R}$ (topología usual), entonces las sucesiones $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$ también son de Cauchy. [I] [R]

P.5.2 Sea (X, d) un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión de Cauchy que posee un punto de acumulación x; entonces la sucesión converge a x. [I] [R]

P.5.3 Sean d y d' dos distancias definidas sobre un mismo conjunto X. Demuestre que si d y d' son equivalentes, entonces toda sucesión de Cauchy en (X, d) es también de Cauchy en (X, d') y viceversa. [I] [R]

P.5.4 Demuestre que, en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, una sucesión es de Cauchy si, y sólo si, es convergente. [I]

5.2. Espacios métricos completos

Definición 5.2.1. *Un espacio métrico (X, d) es **completo** si toda sucesión de Cauchy en X es convergente.*

Ejemplos

Ej.5.5. $\mathbb{R}$ con la distancia usual es completo después del Problema **P.5.4** anterior.

Ej.5.6. Todo espacio métrico discreto es completo, como se deduce del Ejemplo **Ej.5.1.**.

Ej.5.7. $(0, 1)$ no es completo con la distancia usual (véase el Ejemplo **Ej.5.4.**).

Ej.5.8. Si (X, d) es completo, entonces X es completo con la distancia acotada

$$\bar{d}(x, y) = \text{mín}\{d(x, y), 1\},$$

y recíprocamente, dado que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para la distancia $\bar{d}$ si, y sólo si, es una sucesión de Cauchy para la distancia d (véase el Problema **P.5.3**). Y una sucesión converge en la distancia $\bar{d}$ si, y sólo si, converge en la distancia d.

Ej.5.9. $(\mathbb{Q}, |\ |)$ no es un espacio completo. En efecto, vamos a construir una sucesión de Cauchy de números racionales que no es convergente en $\mathbb{Q}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea k_n el mayor natural tal que $k_n^2 \leq 2^{2n+1}$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión

$$x_n = \frac{k_n}{2^n},$$

que es una sucesión de números racionales y verifica las afirmaciones siguientes:

(A) *La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ verifica que $x_m \leq x_n$ si $m \leq n$.*

En efecto, por definición de k_n se tiene

$$(2k_n)^2 \leq 2^2 2^{2n+1} = 2^{2(n+1)+1},$$

y como k_{n+1} es el mayor natural que verifica $k_{n+1}^2 \leq 2^{2(n+1)+1}$, se deduce que $2k_n \leq k_{n+1}$. Por tanto

$$x_n = \frac{k_n}{2^n} \leq \frac{k_{n+1}}{2 \cdot 2^n} = x_{n+1},$$

y de aquí se obtiene de forma inmediata la afirmación (A).

(B) *Para todo $m \leq n$ se verifican*

$$x_m^2 \leq 2 < \left(x_n + \frac{1}{2^n}\right)^2 \quad y \quad x_n \leq x_m < x_n + \frac{1}{2^n}.$$

Observemos que se cumple

$$x_n^2 = \frac{k_n^2}{2^2 n} \leq \frac{2^{2n+1}}{2^n} = 2 \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

Por otra parte, por la definición de k_n tenemos que $(k_n + 1)^2 > 2^{2n+1}$, de donde se obtiene que para todo $m, n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\left(x_n + \frac{1}{2^n}\right)^2 = \left(\frac{k_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{(k_n + 1)^2}{2^{2n}} > \frac{2^{2n+1}}{2^{2n}} = 2. \tag{5.2}$$

Combinando las desigualdades (5.1) y (5.2) se deduce

$$x_m^2 \le 2 < \left(x_n + \frac{1}{2^n}\right)^2, \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}.$$

Teniendo en cuenta que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de racionales positivos, se obtiene

$$x_m < x_n + \frac{1}{2^n}$$

y, por tanto, se cumple

$$x_n \le x_m < x_n + \frac{1}{2^n} \text{ si } m \ge n.$$

(C) *La sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es de Cauchy en* $(\mathbb{Q}, |\ |)$.

En efecto, dados $n \in \mathbb{N}$, $p \ge n$ y $q \ge n$, tendremos, según *(B)*:

$$x_n \le x_p < x_n + \frac{1}{2^n} \quad \text{y} \quad x_n \le x_q < x_n + \frac{1}{2^n},$$

de modo que, por un lado, tenemos

$$x_p - x_q < x_n + \frac{1}{2^n} - x_q \le x_n + \frac{1}{2^n} - x_n = \frac{1}{2^n},$$

y, por otra parte,

$$x_p - x_q > x_p - x_n - \frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2^n}.$$

Combinando las dos desigualdades anteriores, llegamos a

$$|x_p - x_q| \le \frac{1}{2^n}.$$

A partir de aquí es fácil deducir que la sucesión es de Cauchy, pues dado $\varepsilon > 0$ racional, existe n_0 tal que $\frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$ ya que $(\frac{1}{2^n})_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de racionales que converge claramente a 0. Por tanto, basta tomar $p, q \ge n_0$ para obtener

$$|x_p - x_q| \le \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

(D) *La sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *no es convergente en* $\mathbb{Q}$.

Para demostrar esta última afirmación, supongamos que $\lim_n x_n = x$, con $x \in \mathbb{Q}$. Como la sucesión $\{\frac{1}{2^n}\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero tenemos

$$\lim_n x_n^2 = x^2 = \lim_n \left(x_n + \frac{1}{2^n}\right)^2,$$

pero en *(B)* hemos visto que

$$x_n^2 \leq 2 < \left(x_n + \frac{1}{2^n}\right)^2 \quad \text{para todo } \ n \in \mathbb{N},$$

lo que nos lleva a que

$$x^2 \leq 2 \leq x^2.$$

Por tanto, $x^2 = 2$, pero esto no es posible ya que no hay ningún racional cuyo cuadrado sea 2.

Proposición 5.2.2. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $A \subset X$ un subconjunto cerrado. Entonces A es completo.*

DEMOSTRACIÓN. -

Toda sucesión de Cauchy en A también es una sucesión de Cauchy en X y, por tanto, converge en X. Como A es cerrado en X, el límite de la sucesión pertenece al conjunto A. □

Como consecuencia inmediata de la Proposición 5.1.5 tenemos el siguiente Corolario.

Corolario 5.2.3. *Un espacio métrico X es completo si toda sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente.*

Teorema 5.2.4. $\mathbb{R}^m$*, con la topología usual, es un espacio completo .*

DEMOSTRACIÓN. -

Sea $(x(n))_{n=1}^{\infty} = ((x_1(n), \ldots, x_m(n)))_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^m$. Entonces cada coordenada es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, puesto que

$$d_u(x_j(n), x_j(k)) = |x_j(n) - x_j(k)| \leq \left(\sum_{j=1}^{m} (x_j(n) - x_j(k))^2\right)^{1/2}.$$

Lo que significa que (véase el Ejemplo **Ej.5.5.**) que cada sucesión $(x_j(n))_{n=1}^{\infty}$ es convergente a un $x_j \in \mathbb{R}$ para cada $j = 1, \ldots, m$. Por tanto, $(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ es límite de la sucesión $(x(n))_{n=1}^{\infty}$. □

Ejemplos

Ej.5.10. El intervalo abierto $(-1, 1)$ de $\mathbb{R}$ con la distancia $d(x, y) = |x - y|$ no es completo. En este espacio, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$x_n = 1 - \frac{1}{n}$$

es una sucesión de Cauchy ya que en $\mathbb{R}$ converge a 1; y sin embargo, no converge a ningún punto del intervalo $(-1, 1)$.

Lo que demuestra que la completitud no es una propiedad topológica, es decir, no se conserva por homeomorfismos, ya que el intervalo $(-1, 1)$ es homeomorfo a la recta real $\mathbb{R}$ (ambos con la distancia usual) que es completo.

Proposición 5.2.5. *Todo subespacio completo de un espacio métrico es cerrado.*

DEMOSTRACIÓN. -

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $H \subset X$ tal que (H, d_H) es completo. Veamos que H es cerrado comprobando que $H = \overline{H}$. Si $x \in \overline{H}$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en H que converge a x y, por tanto, es de Cauchy, tanto en X como en H. Como (H, d_H) es completo la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge en H a un punto x'. Pero (X, d) es un espacio métrico y, por tanto, de Hausdorff, de modo que $x = x'$. Es decir, $x \in H$, de donde se deduce que $\overline{H} = H$. □

5.3. Completitud y compacidad

Proposición 5.3.1. *Todo espacio métrico compacto es completo.*

DEMOSTRACIÓN. -

Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en X. Como X es compacto, también es secuencialmente compacto, luego existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, convergente. Como consecuencia de la Proposición 5.1.5 la sucesión inicial $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ también es convergente. □

La implicación recíproca no es cierta, en general, como muestra el hecho de que $\mathbb{R}$ es completo, y sin embargo, no es compacto. No obstante, sí se cumple si se considera una hipótesis adicional, la de ser totalmente acotado. El siguiente resultado, que sirve de puente entre los espacios completos y los compactos, justifica que los espacios métricos totalmente acotados reciban también el nombre de *precompactos*.

Proposición 5.3.2. *Todo espacio métrico completo y totalmente acotado es secuencialmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. -

Sea (X, d) un espacio métrico completo y totalmente acotado y sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Vamos a construir una subsucesión de Cauchy que, por ser X completo, será convergente y por tanto, X será secuencialmente compacto.

En efecto, si la sucesión sólo tiene un número finito de términos distintos, no hay nada que probar, pues a partir de un determinado n_0 todos los términos serán iguales y ya tenemos la subsucesión convergente. Supongamos entonces que la sucesión $S = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene infinitos términos distintos. Como X es totalmente acotado y $S \subset X$, S también es totalmente acotado. Por tanto, dado $1/2$ existe un número finito de bolas con este radio que recubren S. Como S es infinito, una de estas bolas contendrá infinitos puntos de la sucesión S; llamemos a esta bola B_1.

Consideremos ahora $B_1 \cap S$. Este conjunto es también totalmente acotado, de modo que si consideramos $1/2^2$, entonces $B_1 \cap S$ estará recubierto por un número finito de bolas de radio $1/2^2$. De entre todas ellas habrá al menos una, que llamaremos B_2, que contendrá una cantidad infinita de términos de la sucesión.

Así sucesivamente vamos construyendo una sucesión de bolas B_k de radio $1/2^k$, cada una de las cuales tiene infinitos términos de la sucesión y que, según se han construido, dos a dos tienen intersección no vacía.

Vamos a construir la subsucesión de la siguiente manera.

El primer término será un término arbitrario de la sucesión que esté en B_1 y le llamamos x_{n_1}. Como en B_2 hay infinitos términos de la sucesión, existe un término de la sucesión $x_{n_2} \neq x_{n_1}$ y con $n_2 > n_1$; procediendo de esta manera construimos una subsucesión $(x_{n_k})_k$, tal que cada $x_{n_k} \in B_k$. Veamos que esta subsucesión es de Cauchy. Sean $p, q \in \mathbb{N}$ con $p < q$. Como $B_p \cap B_q \neq \varnothing$, si $y \in B_p \cap B_q$ tendremos que

$$d(x_{n_p}, x_{n_q}) \leq d(x_{n_p}, y) + d(y, x_{n_q}) \leq \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe m tal que $1/2^{m-1} < \varepsilon$, y si $p, q > m$ (con $p > q$ por ejemplo), entonces

$$d(x_{n_p}, x_{n_q}) < \frac{1}{2^{p-1}} < \frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon,$$

lo que prueba que la subsucesión es de Cauchy. □

Teniendo en cuenta que todo espacio métrico es compacto si, y sólo si, es secuencialmente compacto, podemos expresar los dos resultados anteriores en el siguiente teorema.

Teorema 5.3.3. *Un espacio métrico (X, d) es compacto si, y sólo si, (X, d) es completo y totalmente acotado.*

5.4. Algunos resultados interesantes

Teorema 5.4.1 (Teorema de encaje de Cantor). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de cerrados en X, no vacíos y tales que la sucesión de sus diámetros converge a 0. Entonces $\cap_{n=1}^{\infty} C_n$ es exactamente un punto.*

DEMOSTRACIÓN. -

Que la sucesión de cerrados sea decreciente quiere decir que

$$C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_n \supset \cdots .$$

Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X de manera que $x_n \in C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos que esta sucesión es de Cauchy.

Como los diámetros de $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ forman una sucesión que tiende a 0, tendremos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces $\operatorname{diam}(C_n) < \varepsilon$. Por tanto, como la sucesión de cerrados es decreciente, si $n, m > n_0$, con $m > n$, tenemos que $x_n, x_m \in C_n$. Entonces $d(x_n, x_m) < \operatorname{diam}(C_m) < \varepsilon$ y la sucesión es de Cauchy.

Como X es completo, la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente a un punto $x \in X$. Veamos que $x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.

Supongamos que no fuera así. Entonces existiría $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin C_k$; como C_k es cerrado, tenemos que $d(x, C_k) = r > 0$, con lo que la bola $B(x, r/2)$ y C_k no tienen puntos comunes. Pero si $n > k$, entonces $x_n \in C_k$ (pues la sucesión de cerrados es decreciente), lo que implica que $x_n \notin B(x, r/2)$, lo cual es imposible puesto que $x_n \to x$.

Veamos, finalmente, que este punto es el único en la intersección. Supongamos que existe otro punto $y \in \cap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, entonces $d(x, y) \leq \operatorname{diam}(C_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $\lim_n \operatorname{diam}(C_n) = 0$ ha de ser $d(x, y) \leq 0$. Pero d es una distancia, luego $d(x, y) = 0$. Por tanto, $x = y$. $\square$

Teorema 5.4.2 (Teorema de Baire). *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de abiertos de X tales que A_n es denso en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces se cumple que $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ es denso en X.*

DEMOSTRACIÓN. -

Es suficiente probar que todo abierto no vacío de X corta a $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Sea $A \subset X$ un abierto. Como A_1 es denso, $A \cap A_1$ es no vacío y, por tanto, $x_1 \in A \cap A_1$. Como $A \cap A_1$ es abierto, existe $r_1 < 1$ tal que la bola cerrada $\overline{B}(x_1, r_1) \subset A \cap A_1$.

La bola $B(x_1, r_1)$ es abierta no vacía y A_2 es denso, luego $B(x_1, r_1) \cap A_2$ es no vacío. Por tanto, existe $x_2 \in B(x_1, r_1) \cap A_2$; esta intersección es abierta, luego existe $r_2 < 1/2$ tal que

$$\overline{B}(x_2, r_2) \subset B(x_1, r_1) \cap A_2 \subset A \cap A_1 \cap A_2.$$

Así, por inducción, se puede construir una sucesión de bolas $\{B(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $r_n < 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\overline{B}(x_n, r_n) \subset A \cap A_1 \cap \cdots \cap A_n$.

Si consideramos las bolas cerradas, la familia $\{\overline{B}(x_n, r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ cumple la hipótesis del Teorema 5.4.1 de encaje de Cantor y, por tanto, su intersección es un único punto:

$$\cap_{n=1}^{\infty} \overline{B}(x_n, r_n) = \{x\}, \qquad x \in X.$$

En consecuencia, $x \in A \cap (\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$ por lo que $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$ es denso. $\square$

5.5. Completado de un espacio métrico

Definición 5.5.1. *Diremos que un espacio métrico $(\hat{X}, \rho)$ es un **completado** de un espacio métrico (X, d), si $\hat{X}$ es completo y X es isométrico a un subconjunto denso de $\hat{X}$*

Ejemplos

Ej.5.11. $\mathbb{R}$ con la distancia usual es un completado de $\mathbb{Q}$, puesto $\mathbb{R}$ es completo y $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Teorema 5.5.2. *Sea (Y, d) un espacio métrico y X un conjunto. Entonces son equivalentes:*

(a) (Y, d) *es completo.*

(b) *El espacio de las funciones acotadas $(\mathcal{A}(X, Y), d_\infty)$ es completo (véase el Problema **P.1.29**) .*

DEMOSTRACIÓN. -

"(a)⇒(b)" Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{A}(X, Y), d_\infty)$. Entonces para cada $x \in X$ la sucesión $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en (Y, d); en efecto, dado $\varepsilon > 0$, como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{A}(X, Y)$, existe n_0 tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$ y por tanto, para todo $x \in X$, tenemos $d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$.

Como (Y, d) es completo, para cada $x \in X$ la sucesión $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto en Y que llamaremos $f(x)$. A partir de estos límites definimos la función $f : X \to Y$ tal que a cada $x \in X$ le hace corresponder el límite de la sucesión $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$.

Veamos que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f. Como la sucesión es de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que si $m, n > n_0$ entonces $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$. En particular, si tomamos $n > n_0$ fijo y $p \in \mathbb{N}$, tendremos que $d_\infty(f_n, f_{n+p}) < \varepsilon$. Entonces para todo $x \in X$ se cumple que

$$d(f_n(x), f_{n+p}(x)) < \varepsilon.$$

Si ahora tomamos límites cuando $p \to \infty$, para todo $x \in X$ se tiene

$$d(f_n(x), f_{n+p}(x)) \to d(f_n(x), f(x)),$$

lo que implica que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Concluimos que si $n > n_0$ entonces $d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$, lo que implica que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f.

Lo anterior también implica que $f \in \mathcal{A}(X, Y)$, es decir, está acotada. En efecto, como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy también está acotada (véase la Proposición 5.1.3), luego existe $M > 0$ de manera que $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_\infty(g, M)$ para alguna función $g \in \mathcal{A}(X, Y)$, es decir, $d_\infty(g, f_n) < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a f, existe un n_1 tal que si $n > n_1$, entonces $d_\infty(f_n, f) < 1$. Por tanto,

$$d_\infty(g, f) \leq d_\infty(g, f_n) + d_\infty(f_n, f) < M + 1,$$

si $n > n_1$, de modo que $f \in \mathcal{A}(X, Y)$.

”(b)⇒(a)” Supongamos que (Y, d) no es completo. Por tanto, existe una sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en Y que es de Cauchy pero no converge. Consideremos la sucesión de funciones constantes $f_n : X \to Y$ definidas como $f_n(x) = y_n$ para cada $x \in X$ y cada $n \in \mathbb{N}$; claramente $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}(X, Y)$ y, además, es de Cauchy; en efecto, dados $n, m \in \mathbb{N}$ tenemos

$$d_\infty(f_n, f_m) = d(y_n, y_m).$$

La sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, por tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $d(y_n, y_m) < \varepsilon$ y así, también $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$. Como $\mathcal{A}(X, Y)$ es completo por hipótesis, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cierta función $f \in \mathcal{A}(X, Y)$, lo que significa que la sucesión $(f_n(x))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x)$ en Y, para cada $x \in X$, lo cual es imposible. □

Corolario 5.5.3. *El espacio de las funciones reales acotadas $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ es completo para cualquier conjunto X.*

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata del teorema anterior, ya que $\mathbb{R}$ es un espacio completo. □

Veamos ahora un resultado clásico, el cual afirma que todo espacio métrico se puede embeber isométricamente en un espacio métrico completo, es decir, todo espacio métrico "se puede completar".

Teorema 5.5.4. *Sea (X, d) un espacio métrico. Existe un embebimiento isométrico de X en un espacio métrico completo.*

DEMOSTRACIÓN. -
Sea $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las funciones acotadas de X en $\mathbb{R}$. Sea x_0 un punto fijo de X. Dado $a \in X$, definamos $\phi_a : X \to \mathbb{R}$ mediante la ecuación

$$\phi_a(x) = d(x, a) - d(x, x_0).$$

Aseguramos que ϕ_a está acotada. Efectivamente, de las desigualdades

$$\begin{array}{rcl} d(x, a) & \leq & d(x, b) + d(a, b), \\ d(x, b) & \leq & d(x, a) + d(a, b), \end{array}$$

se deduce que

$$|d(x, a) - d(x, b)| \leq d(a, b).$$

Poniendo $b = x_0$, concluimos que $|\phi_a(x)| \leq d(a, x_0)$, para todo x.

Definamos $\Phi : X \to \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ por

$$\Phi(a) = \phi_a.$$

Vamos a probar que Φ es un embebimiento isométrico de (X, d) en el espacio métrico completo $(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), d_\infty)$. Es decir, vamos a probar que, para todo par de puntos $a, b \in X$,

$$d_\infty(\phi_a, \phi_b) = d(a, b).$$

Por definición,

$$\begin{array}{rcl} d_\infty(\phi_a, \phi_b) & = & \sup\{|\phi_a(x) - \phi_b(x)| : x \in X\} \\ & = & \sup\{|d(x, a) - d(x, b)| : x \in X\}. \end{array}$$

Por tanto, concluimos que

$$d_\infty(\phi_a, \phi_b) \leq d(a, b).$$

Por otro lado, esta desigualdad no puede ser estricta, ya que si $x = a$ entonces

$$|d(x, a) - d(x, b)| = d(a, b),$$

y así concluye la prueba. $\square$

Ejercicios y Problemas

P.5.5 Demuestre que toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico es totalmente acotada. [R]

P.5.6 El teorema de encaje de Cantor necesita de todas las hipótesis:

(a) *El espacio métrico ha de ser completo*. El espacio $(0,1)$ con la distancia inducida por la usual de $\mathbb{R}$ no es un espacio completo y además $\{(0,1/n]\}_{n=2}^{\infty}$ es una familia de cerrados que verifican las hipótesis del teorema cuya intersección es vacía.

(b) *Los conjuntos han de ser cerrados*. Demuestre que $\{(0,\frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia de conjuntos "no cerrados" en $\mathbb{R}$ (que es completo) que verifica el resto de las hipótesis del teorema y, sin embargo, su intersección es vacía.

(c) *La sucesión de los diámetros ha de ser convergente a 0*. $\{[n,\infty)\}_{n=1}^{\infty}$ es una familia decreciente de conjuntos cerrados en $\mathbb{R}$ cuya sucesión de diámetros no converge a 0 y tiene intersección vacía.

P.5.7 (*Teorema del punto fijo de Banach*) Si (X,d) es un espacio métrico, una aplicación $f : X \to X$ se dice que es una ***contracción*** si existe un número $\alpha < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x,y),$$

para todos $x, y \in X$. Demuestre que si f es una contracción de un espacio métrico completo, entonces existe un único punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. [I] [R]

P.5.8 Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en un espacio métrico (X,d) y sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $d(x_n,y_n) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre:

(a) $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es también una sucesión de Cauchy.

(b) $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a un punto $y \in X$ si, y sólo si, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge al punto y. [R]

P.5.9 Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos; considere el espacio $X \times Y$ con cualquiera de las distancias del Ejemplo **Ej.1.9.** (d_∞ sin ir más lejos). Demuestre:

(a) Una sucesión $(x_n,y_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $X \times Y$ si, y sólo si, las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son de Cauchy en X e Y respectivamente.

(b) X e Y son completos si, y sólo si, $X \times Y$ es completo.

P.5.10 Sea (X, d) un espacio métrico en el que toda bola cerrada es compacta. Demuestre que X es completo y que los subconjuntos compactos de X son los cerrados y acotados. [R]