6

Espacios conexos

En este capítulo estudiamos los espacios conexos y su relación con otras propiedades ya estudiadas. Después de presentar unos resultados de los espacios conexos, estudiamos los subespacios conexos de la recta real. A continuación relacionamos conexión y continuidad y estudiamos la conexión de los productos cartesianos. Estudiamos las componentes conexas y finalizamos el capítulo con la conexión por caminos, que implica la conexión ordinaria.

La definición de conexión para un espacio métrico es muy natural. Así, se dice que un espacio puede ser "separado" (no conexo), si es posible "dividirlo" en dos conjuntos abiertos con intersección vacía. En caso contrario, diremos que el espacio es conexo.

Se pretenden alcanzar las siguientes competencias específicas:

- Utilizar los conceptos básicos asociados a la noción de espacio métrico.
- Reconocer y utilizar las propiedades sencillas de la topología métrica.
- Identificar los subconjuntos conexos de la recta real y, en general, de los espacios euclídeos.
- Relacionar los conceptos de conexión y continuidad en un espacio métrico.

Se desarrollarán los contenidos siguientes:

- Espacios métricos conexos. Propiedades.

- Los subespacios conexos de la recta real.
- Conexión y continuidad.
- Componentes conexas.
- Conexión por caminos.

6.1. Conjuntos separados

Definición 6.1.1. *Dado un espacio métrico (X, d) y dos subconjuntos $A, B \subset X$, diremos que A y B están* ***separados*** *si $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$.*

Es evidente que si A y B están separados, entonces son disjuntos. Sin embargo, el recíproco no es cierto como queda de manifiesto en los siguientes ejemplos.

Ejemplos

Ej.6.1. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, los intervalos $(0,1)$ y $(1,2)$ están separados, pero los intervalos $(0,1)$ y $[1,2)$ no lo están, a pesar de que son disjuntos, pues $\overline{(0,1)} = [0,1]$ y $[0,1] \cap [1,2] = \{1\}$.

Ej.6.2. En $(\mathbb{R}^2, d_2)$ el exterior de la bola abierta de centro el origen de coordenadas y radio 1

$$\operatorname{Ext} B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$$

y la propia bola abierta

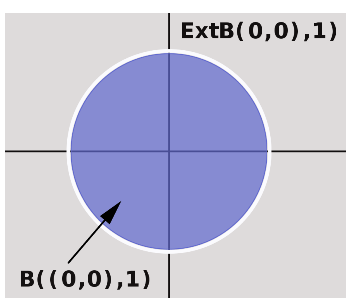

Figura 6.1 – $\operatorname{Ext} B((0,0),1)$ y $B((0,0),1)$ están separados.

$$B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

están separados puesto que

$$\overline{\operatorname{Ext} B((0,0),1)} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 1\} \quad \text{y}$$

$$\overline{B((0,0),1)} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

y es evidente que que

$$\overline{\text{Ext}\, B((0,0),1)} \cap B((0,0),1) = \text{Ext}\, B((0,0),1) \cap \overline{B((0,0),1)} = \varnothing$$

(véase la Figura 6.1).

Ej.6.3. En $\mathbb{R}$ con la topología usual, los conjuntos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ no están separados, pues $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \supset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Ej.6.4. Los conjuntos $A = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1\}$ y

$$B = \{(1/n, y)) : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\}$$

no están separados, pues todos los puntos de A son adherentes a B (véase la Figura 6.2).

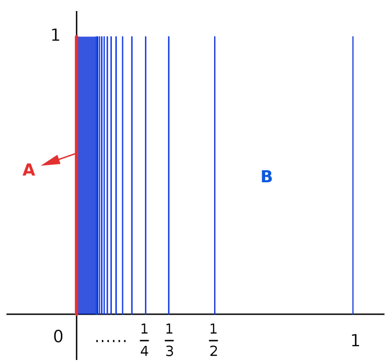

Figura 6.2 – Subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ no separados.

6.2. Espacios conexos

Definición 6.2.1. *Diremos que un espacio métrico (X,d) es **conexo** si X no es unión de dos subconjuntos no vacíos y separados. En caso contrario diremos que X es no conexo.*

Proposición 6.2.2. *Sea (X,d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ dos subconjuntos disjuntos tales que $X = A \cup B$. Son equivalentes:*

(a) *X es no conexo (A y B están separados).*

(b) *A y B son cerrados.*

(c) *A y B son abiertos.*

DEMOSTRACIÓN. -

"(a)⇒(b)" Supongamos que los conjutos A y B están separados, es decir, que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$ y veamos que A es cerrado. Podemos poner

$$\overline{A} = \overline{A} \cap X = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup \varnothing = A.$$

Por tanto, A es cerrado. Análogamente se prueba que B también es cerrado.

"(b)⇒(c)" Suponemos ahora que A y B son cerrados. Como $A \cup B = X$ y $A \cap B = \varnothing$ entonces $A = B^c$ y $B = A^c$. Por tanto, A y B son abiertos (pues son complementarios de cerrados).

"(c)⇒(a)" Supongamos que A y B son abiertos disjuntos tales que $A \cup B = X$. Procediendo como en la implicación anterior podemos probar que A y B son cerrados (pues son complementarios de abiertos). Entonces $\overline{A} \cap B = A \cap B = \varnothing$ y $A \cap \overline{B} = A \cap B = \varnothing$, luego A y B están separados. □

La conexión se puede formular de otro modo, como muestra el siguiente corolario cuya demostración es consecuencia de la Proposición 6.2.2.

Corolario 6.2.3. *Un espacio métrico (X, d) es conexo si, y sólo si, los únicos subconjuntos que son, a la vez, abiertos y cerrados son X y $\varnothing$.*

DEMOSTRACIÓN. -

Si $A \subset X$, $A \neq X$, abierto y cerrado, entonces A^c también es abierto y cerrado, y $X = A \cup A^c$, con lo que X sería no conexo. □

La Proposición 6.2.2 nos permite introducir un nuevo concepto.

Definición 6.2.4. *Sea X un espacio métrico. Una **separación** de X es un par A, B de abiertos (o cerrados) disjuntos no triviales de X cuya unión es X.*

6.2.1. Subespacios conexos.

Definición 6.2.5. *Sea un espacio métrico (X, d) y un subconjunto $S \subset X$. Diremos que S es un **subespacio conexo** o un **subconjunto conexo** si (S, d_S) es conexo.*

Proposición 6.2.6. *Un subconjunto S de un espacio métrico (X, d) es conexo si, y sólo si, no existen dos subconjuntos $A, B \subset X$ separados tales que $A \cup B = S$.*

DEMOSTRACIÓN. Es una consecuencia inmediata de la definición de topología relativa y la Proposición 6.2.2. □

Ejemplos

Ej.6.5. Sea Y el subespacio $[-1, 0) \cup (0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$. Los conjuntos $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ son no vacíos y abiertos en Y (aunque no en $\mathbb{R}$); de esta forma, constituyen una separación de Y. Por otra parte, obsérvese que ninguno de estos conjuntos contiene puntos de acumulación del otro.

Ej.6.6. Sea X el subespacio $[-1, 1]$ de la recta real. Los conjuntos $[-1, 0]$ y $(0, 1]$ son disjuntos y no vacíos pero no forman una separación de X ya que el primer conjunto no es abierto en X. Por otro lado, obsérvese que el primer conjunto contiene un punto de acumulación, el 0, del segundo. De hecho, probaremos enseguida que no existe una separación del espacio $[-1, 1]$.

Ej.6.7. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ no es conexo. Es más, los únicos subespacios conexos de $\mathbb{Q}$ son los conjuntos unipuntuales: si Y es un subespacio de $\mathbb{Q}$ conteniendo dos puntos p y q, es posible elegir un número irracional a entre p y q y escribir Y como la unión de los abiertos

$$Y \cap (-\infty, a) \quad \text{e} \quad Y \cap (a, +\infty).$$

Ejercicios y Problemas

P.6.1 Sean A, B y C tres subconjuntos de un espacio métrico. Demuestre:

(a) Si A y B están separados y $C \subset A$, entonces C y B están separados.

(b) Si C y A están separados y C y B también están separados, entonces C y $A \cap B$ están separados.

(c) Si A y B están separados, entonces $A \cap C$ y $B \cap C$ están separados. [I] [R]

P.6.2 Demuestre que un espacio discreto con más de un punto, es no conexo.

P.6.3 Demuestre que si A y B son dos subconjuntos disjuntos de un espacio métrico y ambos son abiertos o ambos son cerrados, entonces están separados. [I] [R]

P.6.4 Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ separados. Pruebe:

(a) Si $A \cup B$ es abierto, entonces A y B son abiertos.

(b) Si $A \cup B$ es cerrado, entonces A y B son cerrados. [I] [R]

P.6.5 Demuestre que si A es un subconjunto conexo de un espacio métrico, entonces A es infinito.

P.6.6 ¿Es conexa la intersección de dos subconjuntos conexos? En caso afirmativo demuéstrelo y en caso negativo encuentre un contraejemplo.

6.2.2. Conjuntos conexos.

Lema 6.2.7. *Sea (X, d) un espacio métrico y sea $S \subset X$ un subconjunto conexo. Si $A, B \subset X$ son una separación de X, entonces bien $S \subset A$, bien $S \subset B$.*

DEMOSTRACIÓN. -

Supongamos, por reducción al absurdo, que $S \cap A \neq \varnothing$ y $S \cap B \neq \varnothing$; entonces, como $A \cup B = X$, tenemos

$$S = (S \cap A) \cup (S \cap B).$$

Por tanto $S \cap A$ y $S \cap B$ son abiertos disjuntos en S, no vacíos y verificando

$$(S \cap A) \cap (S \cap B) = \varnothing,$$

con lo cual ambos conjuntos constituyen una separación de S, en contra de que S es conexo. □

Teorema 6.2.8. *La unión de una colección de subespacios conexos de X que tienen un punto en común es conexa.*

DEMOSTRACIÓN. -

Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una colección de subespacios conexos de un espacio X y sea p un punto de $\bigcap_{i\in I} A_i$. Probemos que el espacio $Y = \bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo. Supongamos que $Y = C \cup D$ es una separación de Y. El punto p está, o bien en C, o bien en D, pero no en ambos; supongamos que $p \in C$. Como cada A_i es conexo y $p \in C$, según el Lema 6.2.7 anterior, $A_i \subset C$. Por tanto, $\bigcup_{i\in I} A_i \subset C$, contradiciendo el hecho de que D era no vacío. □

Teorema 6.2.9. *La unión de una colección de subespacios conexos de X tales que no están separados dos a dos es conexa.*

DEMOSTRACIÓN. -

Supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de subconjuntos conexos de X no separados dos a dos, y supongamos que su unión $A = \cup_{i\in I} A_i$ es no conexo; entonces según el Corolario 6.2.3, existe $B \subsetneq A$ no vacío que es abierto y cerrado en (A, d_A).

Como $B \neq \varnothing$, existe $x \in B \subset A$ y como $B \neq A$, existe $y \in A$, $y \notin B$. Por tanto, para ciertos índices $i_x, i_y \in I$ tenemos $x \in A_{i_x}$ e $y \in A_{i_y}$. Entonces

$B \cap A_{i_x} \neq \varnothing$ es abierto y cerrado en (A_{i_x}, d_{i_x}) que es conexo por hipótesis, luego $B \cap A_{i_x} = A_{i_x}$ lo que implica que $A_{i_x} \subset B$.

De la misma forma $(A - B) \cap A_{i_y} \neq \varnothing$ es abierto y cerrado en (A_{i_y}, d_{i_y}), luego $(A - B) \cap A_{i_y} = A_{i_y}$, lo que implica que $A_{i_y} \subset B - A$.

Pero A y $A - B$ están separados en (A, d_A), pues son dos abiertos y cerrados no vacíos cuya unión es A, lo que lleva consigo que A_{i_x} y A_{i_y} también están separados, en contra de la hipótesis, lo que concluye la prueba. □

La demostración del siguiente corolario es consecuencia del Teorema 6.2.9 y se le propone como ejercicio.

Corolario 6.2.10. *Sea (X, d) un espacio métrico y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos conexos no vacíos de X tales que $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ para cada par $i, j \in I$. Entonces $A = \cup_{i \in I} A_i$ es conexo.*

Teorema 6.2.11. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces se verifican:*

(a) *Si $H \subset X$ es un subconjunto conexo y $S \subset X$ tal que $H \subset S \subset \overline{H}$, entonces S es conexo.*

(b) *Si S es un subconjunto conexo de X, entonces $\overline{S}$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. -

(a) Si $x \in H$, entonces $H \cup \{x\}$ es conexo puesto que H y $\{x\}$ son conexos no separados ($\overline{H} \cap \{x\} = \{x\}$). Entonces podemos poner $S = \bigcup_{x \in S}(H \cup \{x\})$ y, teniendo en cuenta que $H \subset S \subset \overline{H}$, S es unión de conexos no disjuntos, lo que implica que S es conexo.

(b) Es una consecuencia inmediata de (a). □

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.6.7}}$ Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de X que verifican $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ para cada n. Demuestre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es conexo. [I] [R]

$\boxed{\textbf{P.6.8}}$ Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una colección de subespacios conexos de X y A un subespacio conexo de X. Demuestre que si $A \cap A_\alpha \neq \varnothing$ para todo α, entonces $A \cup \left(\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha\right)$ es conexo.

$\boxed{\textbf{P.6.9}}$ Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ una separación de X, es decir $X = A \cup B$ y A y B están separados. Demuestre que si $S \subset X$ es conexo, entonces está contenido únicamente, o bien en A, o bien en B.

6.3. Conexos en $\mathbb{R}$.

Teorema 6.3.1. *Un subconjunto $S \subsetneq \mathbb{R}$, con la distancia usual, es conexo si, y sólo si, es un intervalo o un conjunto unitario.*

DEMOSTRACIÓN. -

"$\Rightarrow$" Supongamos que S es conexo. Si S es unitario no hay nada que probar. Supongamos entonces que ni es unitario ni es un intervalo; entonces según el Lema 4.4.1 existen $x, y \in S$ tales que $[x, y]$ no está contenido en S, es decir, existe $z \in (x, y)$ tal que $z \notin S$. Consideremos los conjuntos

$$A = (-\infty, z) \cap S \qquad \text{y} \qquad B = (z, +\infty) \cap S.$$

Entonces A y B están separados y $S = A \cup B$, en contra de que S es conexo.

"$\Leftarrow$" Si S es unitario no hay nada que probar. Supongamos entonces que S es un intervalo y que es no conexo. Esto quiere decir que existen $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y separados tales que $S = A \cup B$. Sean $x \in A$, $y \in B$ y supongamos que $x < y$. Como S es un intervalo, el Lema 4.4.1 implica $[x, y] \subset S$.

Consideremos el conjunto $C = [x, y] \cap A$, que es no vacío ($x \in A$) y está acotado superiormente por y; por tanto, existe $\alpha = \sup C$.

Tenemos entonces que $x \leq \alpha \leq y$, es decir, $\alpha \in [x, y] \subset S$. Luego, o bien $\alpha \in A$, o bien $\alpha \in B$, pero no a los dos. Supongamos que $\alpha \in A$, esto implica que $\alpha < y$. Como A es abierto en S, por definición de topología relativa existirá G abierto en $\mathbb{R}$ tal que $A = G \cap S$. Luego $\alpha \in G$, de modo que existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset G$. Además, $\alpha < y$, de modo que podemos tomar $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha + \varepsilon < y$, luego $\alpha + \varepsilon \in S$ y, por tanto, $\alpha + \varepsilon \in G \cap S = A$, en contra de que α es supremo. De forma análoga se ve que α no puede estar en B. □

Corolario 6.3.2. $\mathbb{R}$ *con la topología usual es un espacio conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Es una aplicación directa del Teorema 6.3.1 anterior. □

Ejemplos

Ej.6.8. $\mathbb{Q}$ no es conexo puesto que no es un intervalo. Ya habíamos visto que $\mathbb{Q}$ es no conexo en el Ejemplo **Ej.6.7.** utilizando otros argumentos.

Ej.6.9. A partir del Corolario 6.3.2, concluimos que en $(\mathbb{R}, |\ |)$, los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son $\mathbb{R}$ y $\varnothing$.

6.4. Conexión y continuidad.

Teorema 6.4.1. *Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos, $f : X \to Y$ una aplicación continua y $S \subset X$ un subconjunto conexo en X. Entonces $f(S)$ es conexo en Y.*

DEMOSTRACIÓN. -

Supongamos que $f(S)$ es no conexo, entonces existen $A, B \subset Y$ no vacíos y separados tales que $f(S) = A \cup B$. Como $f : S \to f(S)$ es continua y A y B son abiertos y cerrados en $f(S)$ con la topología relativa, tendremos que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ serán abiertos y cerrados en S con la distancia d_S inducida por d. Además son no vacíos, disjuntos y cumplen

$$S = f^{-1}(f(S)) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$

con lo que S sería no conexo, en contra de la hipótesis. $\square$

La conexión es una propiedad topológica.

Corolario 6.4.2. *Sean (X, d) y (Y, d') dos espacios métricos homeomorfos. Entonces X es conexo si, y sólo si, Y es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Se trata de una aplicación directa del Teorema 6.4.1 anterior. $\square$

Los dos Problemas siguientes **P.6.10** y **P.6.11** corresponden a dos importantes proposiciones a las que debe prestar especial atención y cuya sencilla demostración, a partir del Teorema 6.4.1, se le propone como ejercicio.

Ejercicios y Problemas

P.6.10 Un espacio métrico (X, d) es conexo si, y sólo si, cualquier aplicación continua entre X y el espacio discreto $\{0, 1\}$ es constante, es decir, o bien $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, o bien $f(x) = 1$ para todo $x \in X$.

P.6.11 Si (X, d) es un espacio métrico no conexo, entonces existe una aplicación $f : X \to \{0, 1\}$ continua y no constante.

P.6.12 Demuestre que si (X, d) es conexo y $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_u)$ es una aplicación continua, entonces $f(X)$ es un intervalo.

Teorema 6.4.3 (del valor intermedio)**.** *Un espacio métrico (X, d) es conexo si, y sólo si, cada aplicación continua $f : X \to \mathbb{R}$ cumple que si $x, y \in X$ y $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x) \leq c \leq f(y)$, entonces existe $z \in X$ tal que $f(z) = c$.*

DEMOSTRACIÓN. -

"$\Rightarrow$" Si X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo en $\mathbb{R}$ y, por tanto, es un intervalo, de modo que contiene todos los puntos intermedios.

"$\Leftarrow$" Supongamos que X es no conexo, entonces $X = A \cup B$ con A y B no vacíos y separados. Consideramos una función $g : X \to \{0, 1\}$ continua tal y como la proporciona el Problema **P.6.11** y tal que $g(A) = \{0\}$ y $g(B) = \{1\}$.

Sea la inclusión $i : \{0, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, que es continua (observe que la distancia usual de $\mathbb{R}$ induce sobre $\{0, 1\}$ la distancia discreta y revise el Problema **P.3.1**), y consideremos la composición $h = i \circ g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que, al ser composición de funciones continuas, también es continua. Entonces h no cumple las hipótesis, pues $0 < 1/2 < 1$ y, sin embargo, no hay ningún punto de X cuya imagen por h sea distinta de 0 o de 1, en contra de la hipótesis. □

6.4.1. Espacios producto.

Teorema 6.4.4. *Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos conexos. Entonces el producto $X \times Y$ es conexo. (Con cualquiera de las distancias d_1, d_2 o d_∞ del Ejemplo **Ej.1.9.**).*

DEMOSTRACIÓN. -

Tomemos un punto $(a, b) \in X \times Y$. La "rebanada horizontal" $X \times \{b\}$ es conexa, ya que es homeomorfa a X, y también lo es cada "rebanada vertical" $\{x\} \times Y$ para cada $x \in X$ ya que éstas son homeomorfas a Y (véase el Problema **P.3.9**).

Por otra parte, para cada $x \in X$ la intersección de los conjuntos $X \times \{b\}$ y $\{x\} \times Y$ es no vacía, en concreto es precisamente $(X \times \{b\}) \cap (\{x\} \times Y) = \{(x, b)\}$. Por tanto, el conjunto $(X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)$ es conexo por ser unión de conexos no disjuntos (véase la Figura 6.3).

Entonces la unión

$$\bigcup_{x \in X} \{(X \times \{b\}) \cup (\{x\} \times Y)\}$$

de todos estos conjuntos es precisamente $X \times Y$ y es conexo pues todos tienen en común al conjunto $X \times \{b\}$ (véase de nuevo la Figura 6.3).

□

Corolario 6.4.5. *El producto cartesiano de una cantidad finita de espacios métricos conexos, es un espacio conexo.*

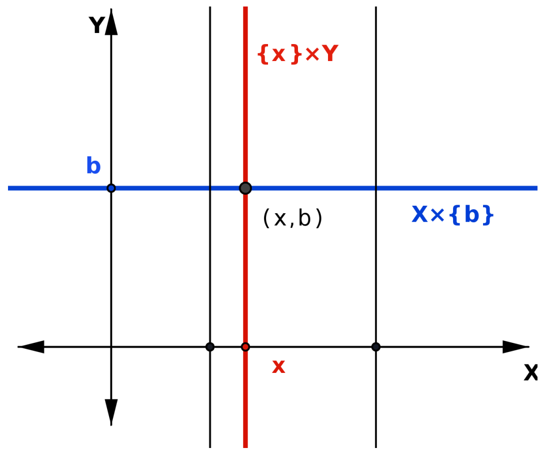

Figura 6.3 – Conexión en el espacio producto.

DEMOSTRACIÓN. La prueba para cualquier colección finita de espacios conexos puede realizarse por inducción, utilizando el hecho (¿fácilmente demostrable?) de que $X_1 \times \cdots \times X_n$ es homeomorfo a $(X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$. $\square$

Ejemplos

Ej.6.10. $\mathbb{R}^n$ con cualquiera de las distancias d_1, d_2 o d_∞ es conexo.

6.5. Componentes conexas

Definición 6.5.1. *Sea (X, d) un espacio métrico y $C \subset X$ un subconjunto, diremos que C es una **componente conexa** de X si C es conexo y no hay ningún subconjunto conexo y propio de X que contenga a C.*

Observación 6.5.2. -

(a) Obviamente si X es conexo, tiene una única componente conexa que coincide con todo el espacio.

(b) Cualquier espacio, conexo o no, tiene componentes conexas no vacías.

Definición 6.5.3. *Sea (X, d) un espacio métrico. Se llama **componente conexa** $C(x)$ de un punto $x \in X$a la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen al punto x.*

Observación 6.5.4. *Es obvio que $C(x)$ es el mayor conjunto conexo que contiene a x y que $C(x)$ es la componente conexa de X que contiene a dicho punto.*

Teorema 6.5.5. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces las componentes conexas de X constituyen una partición de X, es decir son disjuntas entre sí y la unión de todas ellas es X.*

DEMOSTRACIÓN. - Sean $x,y \in X$ veamos que si $C(x)$ y $C(y)$ son sus componentes conexas respectivas, entonces o bien coinciden ,$C(x) = C(y)$, o bien $C(x) \cap C(y) = \varnothing$. En efecto, supongamos que $C(x) \cap C(y) \neq \varnothing$, entonces se trata de dos conjuntos conexos no separados, lo que significa que $C(x) \cup C(y)$ es conexo, pero la componente conexa es el mayor conexo que contiene al punto, de modo que $C(x) = C(x) \cup C(y) = C(y)$. Por otra parte, es evidente que la unión de todas las componentes conexas es todo X. $\square$

Como en ocasiones anteriores, los Problemas siguientes recogen importantes resultados sobre componentes conexas, cuya demostración se le propone como ejercicio. Debe prestarles la necesaria atención.

Ejercicios y Problemas

P.6.13 Sea (X,d) un espacio métrico. Demuestre que cada subconjunto conexo de X está contenido en una única componente conexa.

P.6.14 Cada subconjunto conexo de un espacio métrico que es a la vez abierto y cerrado, es una componente conexa.

P.6.15 Cada componente conexa de un espacio métrico es un cerrado.

P.6.16 Considere en $(\mathbb{R}, |\ |)$, el conjunto $C = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la distancia inducida por la usual. Pruebe que $\{0\}$ es una componente conexa de C y concluya que las componentes conexas no son, necesariamente abiertos.

6.6. Conexión por caminos (o arcos).

La conexión de los intervalos en $\mathbb{R}$ nos conduce a la condición de que cualquier par de puntos de X pueda unirse mediante un *camino* o un *arco* en X. Y esto nos lleva a la conexión por caminos (también llamada conexión por arcos).

Definición 6.6.1. *Sea (X,d) un espacio métrico y dos puntos $x,y \in X$:*

- *Un **camino** o un **arco** en X, que une el punto x con el punto y, es una aplicación continua $f : [a,b] \longrightarrow X$, donde $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es intervalo cerrado con la distancia usual, tal que $f(a) = x$ y $f(b) = y$.*

- *Un espacio X se dice que es **conexo por caminos** o **conexo por arcos** si cada par de puntos de X se pueden unir mediante un camino en X.*

Observación 6.6.2. *Dado que cualquier intervalo cerrado $[a,b]$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$ (véase el Problema **P.3.8**). Por composición, la definición de camino se puede establecer diciendo que la aplicación continua está definida en el intervalo $[0,1]$; de hecho en numerosas ocasiones, y por comodidad, así lo haremos.*

Ejemplos

Ej.6.11. Si $f : [0,1] \longrightarrow (X,d)$ es un camino que une x e y, entonces La aplicación $\hat{f} : [0,1] \longrightarrow (X,d)$ definida como $\hat{f}(t) = f(1-t)$, es un camino que une y con x (digamos, que cambia el sentido del camino).

Ej.6.12. Si $f : [0,1] \longrightarrow (X,d)$ es un camino que va del punto x al punto y y $g : [0,1] \longrightarrow (X,d)$ es un camino que une y con z, definimos la aplicación

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } \ 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1) & \text{si } \ 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

$f*g$ es un camino (es continua) que une x con z siguiendo el camino que va de x a y y, a continuación de forma continua, el que une y con z. El camino $f*g$ recibe el nombre de ***yuxtaposición*** de f y g.

Ej.6.13. La bola cerrada de radio unidad, centrada en cualquier punto de $\mathbb{R}^n$, es decir

$$B^n = \overline{B}(x,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\},$$

donde $\|x\|_2 = \|(x_1,\ldots,x_n)\|_2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ es la norma euclídea (véase el Ejemplo **Ej.1.41.**), es conexa por caminos. En efecto, dados dos puntos $x, y \in B^n$, el segmento $f : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$f(t) = (1-t)x + ty$$

es continuo y está contenido en B^n ya que

$$\|f(t)\|_2 = \|(1-t)x + ty\|_2 \leq (1-t)\|x\|_2 + t\|y\|_2 \leq 1.$$

Ej.6.14. $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual es conexo por caminos.

Teorema 6.6.3. *Todo espacio métrico conexo por caminos es también conexo.*

DEMOSTRACIÓN. -

Supongamos que X un espacio conexo por caminos pero no conexo. Por tanto existen dos conjuntos no vacíos $\{A, B \subset X\}$ que constituyen es una separación de X, es decir $X = A \cup B$ y A y B están separados. Sea $f : [0,1] \to X$ un camino en X. Como $[0,1]$ es conexo y f es continua, por el Teorema 6.4.1, el conjunto $f([0,1])$ es conexo y, en consecuencia, debe estar contenido enteramente o bien en A, o bien en B (véase el Problema **P.6.9**). Por tanto, no existen caminos en X que unan puntos de A con puntos de B lo cual es contrario con el hecho de que X sea conexo por caminos. $\square$

Teorema 6.6.4. *Sea (X, d) un espacio métrico conexo por caminos, e (Y, d') un espacio métrico. Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces $f(X)$ es conexo por caminos.*

DEMOSTRACIÓN. - Si $y_1, y_2 \in f(X)$, entonces $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in X$ y como X es conexo por caminos, existe $g[0,1] \longrightarrow X$ continua tal que $g(0) = f^{-1}(y_1)$ y $g(1) = f^{-1}(y_2)$. Entonces $f \circ g$ es un camino que conecta y_1 con y_2. $\square$

El recíproco del Teorema 6.6.3 anterior no es cierto en general, es decir, un espacio conexo no es necesariamente conexo por caminos; así lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplos

Ej.6.15. Sean los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ siguientes:

$$A = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\},\ B_n = \{(\frac{1}{n}, y) : 0 \leq y \leq 1\} \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos el punto $P(0,1)$ y el conjunto

$$C = A \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \cup \{p\}$$

dotado con la topología inducida por la usual de $\mathbb{R}^2$ y cuya representación gráfica puede ver el la Figura 6.4. Entonces X es conexo pero no es conexo por caminos.

(1) *X es conexo.* En efecto, tanto A como cada uno de los B_n es conexo por caminos puesto que se trata segmentos y, por tanto según el Teorema 6.6.3 también son conexos. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A \cap B_n = \{(1/n, 0)\}$, lo que implica que el conjunto $A \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$ es unión de conexos no separados, y por tanto es conexo. Por último P es un punto adherente a $A \cup (\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n)$ ya que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < \varepsilon$ por lo que, $(1/n, 1) \in B(P, \varepsilon)$, entonces, según el Teorema 6.2.11 (a), C es conexo.

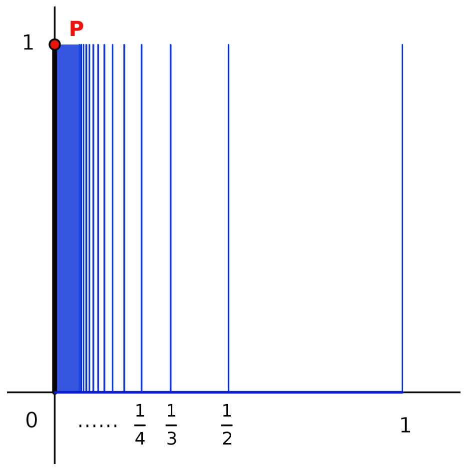

Figura 6.4 – El Conjunto C es conexo pero no es conexo por caminos.

(2) *C es no conexo por caminos.* Para demostrar esto vamos a comprobar que cualquier camino $f : [a, b] \to C$ que comience en P, cumple que $f(t) = P$ para todo $t \in [a, b]$ y, por tanto, no existe ningún camino que una P con otro punto de C. Esto último será consecuencia, a su vez, de que $f^{-1}(P)$ es abierto y cerrado en $[a, b]$ que es conexo, con lo cual tendremos que $f^{-1}(P) = [a, b]$.

Como f es una aplicación continua y $\{P\}$ es un conjunto cerrado, $f^{-1}(P)$ es cerrado. Vamos a ver que $f^{-1}(P)$ también es abierto. Consideremos una bola abierta centrada en P en el subespacio C. Esta bola será la intersección de una bola en $\mathbb{R}^2$ con C, $B(P, r) \cap C$; y tomemos $r < 1$, de manera que no corte al eje de abscisas. Sea un punto $x_0 \in f^{-1}(B(P, r) \cap C)$, entonces como consecuencia de la continuidad de f, existe, en $[a, b]$, una bola centrada en x_0, $B(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tal que $f(B(x_0, \delta)) \subset (B(P, r) \cap C)$. Como $B(x_0, \delta)$ es un intervalo, es conexo y, por tanto, $f(B(x_0, \delta))$ también lo es, por lo que no puede contener ningún punto distinto de P. De lo contrario, si existe $(1/m, s) \in (B(P, r) \cap C)$ $(0 < s \leq 1)$, tomamos $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se cumpla $1/(m + 1) < \alpha < 1/m$ con lo que tenemos que

$$(-\infty, \alpha) \times \mathbb{R} \quad \text{y} \quad (\alpha, +\infty) \times \mathbb{R}$$

son dos abiertos disjuntos en $\mathbb{R}^2$, por lo que

$$[(-\infty, \alpha) \times \mathbb{R}] \cap (B(P, r) \cap C) \quad \text{y} \quad [(\alpha, +\infty) \times \mathbb{R}] \cap (B(P, r) \cap C)$$

constituyen una separación de $(B(P, r) \cap C$. Como $f(B(x_0, \delta))$ es conexo y contiene a P, se tiene que

$$f(B(x_0, \delta)) \subset [(-\infty, \alpha) \times \mathbb{R}] \cap (B(P, r) \cap C),$$

por lo que no contiene a

$$(\frac{1}{m}, s) \in [(\alpha, +\infty) \times \mathbb{R}] \cap (B(P, r) \cap C)$$

y, por tanto, $f(B(x_0, \delta)) = \{P\}$ lo que significa $B(x_0, \delta) \subset f^{-1}(P)$ y $f^{-1}(P)$ es abierto, que es lo que queríamos demostrar.

Ej.6.16. El ***espacio euclídeo agujereado*** es $\mathbb{R}^n - \{0\}$, con la distancia usual inducida; donde 0 es el origen en $\mathbb{R}^n$. Si $n > 1$, este espacio es conexo por caminos (y por tanto conexo): dados $x, y \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, podemos unir x e y mediante el segmento que ambos determinan, si este segmento no pasa por el origen. En caso de que así ocurriera, podemos elegir otro punto z que no esté contenido en la recta que determinan x e y y a continuación considerar el "segmento quebrado" que determinan x, z e y y ya tenemos un camino que une los puntos x e y.

Sin embargo, si $n = 1$, entonces $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ no es conexo, pues esta unión es una separación de $\mathbb{R} - \{0\}$.

Ej.6.17. A partir del Ejemplo **Ej.6.16.** anterior, podemos concluir que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, con las distancias usuales, no son homeomorfos. En efecto si existiera un homeomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; y $f(0, 0) = a$; entonces la restricción de f a $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, sería un homeomorfismo entre este conjunto y $\mathbb{R} - \{a\}$, pero $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ es conexo y, sin embargo $\mathbb{R} - \{a\}$ no lo es, en contra del Corolario 6.4.2.

Ej.6.18. La ***esfera unidad*** S^{n-1} en $\mathbb{R}^n$, o $(n-1)$-esfera es la frontera de la bola de centro el origen y radio 1

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Si $n > 1$, la $(n-1)$-esfera S^{n-1} es conexa por caminos ya que la aplicación $g : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \longrightarrow S^{n-1}$ definida por $g(x) = x/\|x\|$ es continua y sobreyectiva; y según el Teorema 6.6.4, conexo por caminos.

Ejercicios y Problemas

$\boxed{\textbf{P.6.17}}$ Estudie si son homeomorfos la recta real y la circunferencia, con la distancia usual. [I]

$\boxed{\textbf{P.6.18}}$ Sean $A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, , y = x/n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$; y $B = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq x \leq 1\}$.

(a) Haga una representación gráfica del conjunto $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y estudie si es conexo por caminos y/o conexo.

(b) Idem para el conjunto $A \cup B$. [I]

P.6.19 Sea (X,d) un espacio métrico, $M \subset X$ un subconjunto conexo y una aplicación continua $f : M \to \mathbb{R}$.

(a) Pruebe que si $a \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que $f(a) < \alpha$ entonces existe $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $f(x) < \alpha$ para todo $x \in M \cap U$.

(b) Supongamos que para todo entorno $U \in \mathcal{U}_a$ existen $x, y \in U \cap M$ tales que $f(x)$ y $f(y)$ son de signos opuestos; demuestre que $f(a) = 0$.

(c) Pruebe que si para $a, b \in M$, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, existe $c \in M$ tal que $f(c) = 0$. [I] [R]

P.6.20 Sea X un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto. Demuestre que todo subconjunto conexo $P \subset X$ que corte a A y A^c, también corta a la frontera de A. [I] [R]

P.6.21 Sea X un espacio métrico, $A, B \subset X$ dos cerrados tales que $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos. Pruebe que, entonces, A y B son conexos. Busque un contraejemplo en $\mathbb{R}$, con la topología usual, mostrando que la exigencia de que A y B sean cerrados es necesaria. [I] [R]

P.6.22 Sean A un subconjunto propio de X y B un subconjunto propio de Y. Si X e Y son conexos, demuestre que el conjunto $(X \times Y) - (A \times B)$ es conexo. [I] [R]

P.6.23 Un espacio métrico (X,d) es ***totalmente disconexo*** si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen dos subconjuntos $G, H \subset X$ separados, tales que $x \in G$ e $y \in H$.

(a) Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales con la distancia inducida por la usual de $\mathbb{R}$, es totalmente disconexo.

(b) Demuestre que las componentes conexas de un espacio totalmente disconexo son los conjuntos unipuntuales.

P.6.24 (Teorema del punto fijo). Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una aplicación continua. Demuestre que existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$. [R]

P.6.25 (Teorema de Bolzano) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, de manera que $f(a) \cdot f(b) < 0$. demuestre que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

P.6.26 Si (X,d) es un espacio métrico, demuestre que X es conexo si, y sólo si, para todo $A \subsetneq X$ no vacío, se cumple que $\mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$. [I]

$\boxed{\textbf{P.6.27}}$ Sea $(\mathbb{R}^2, d_u)$ y consideremos el conjunto

$$A = ((0,1) \times (0,1)) \cup \{(0,q) : q \in \mathbb{Q}, 0 \leq q \leq 1\}.$$

¿Es A conexo? Justifique la respuesta.

Apéndices