-1

Un poco de historia

La Topología es básica en la formación de cualquier matemático actual; no en vano, forma parte de las materias troncales (fundamentales) de los primeros cursos de la titulación en Matemáticas en cualquier facultad. La Topología se encuentra presente en casi todas las áreas de las Matemáticas: el Álgebra, la Geometría, el Análisis, etc. (y éstas, como no, también en la Topología). Sus métodos y sus resultados facilitan el tratamiento de numerosos problemas e incluso permiten abordar otros que no tienen un origen estrictamente topológico.

La Topología ha alcanzado, digamos su madurez, recientemente. La mayoría de los estudiosos de la historia de las Matemáticas sitúan su *puesta de largo* en las primeras décadas del s. XX, a partir de los trabajos de F. Hausdorff (1914), P. Alexandroff (1926) y W. Sierpinski (1928). Cuando decimos madurez o *puesta de largo*, queremos decir que es en esos años, y después de bastantes aproximaciones (como más adelante veremos), cuando se fijan las definiciones fundamentales, cuando el perfil de su actuación, de los problemas de los que se ocupa, etc., quedan dibujados de manera suficientemente clara. A partir de ese momento, la Topología inicia (o continúa) un rápido desarrollo hasta convertirse en un área imprescindible.

Los inicios pueden situarse, sin embargo, un poco más lejos, retrocediendo al siglo XVIII. Hasta entonces los problemas matemáticos habían estado vinculados, en mayor o menor grado, a la idea de medida, magnitud o distancia, y en esa época se empiezan a plantear problemas en los que estos aspectos dejan de tener importancia. Son problemas que no dependen de la distancia o el tamaño, sino del lugar, de las conexiones, etc. De hecho, los primeros matemáticos que los abordan dan al estudio de estos problemas el nombre de *Geometria situs* o *Analysis situs* cuya traducción viene a ser *Geometría o Análisis de la situación o de la posición*.

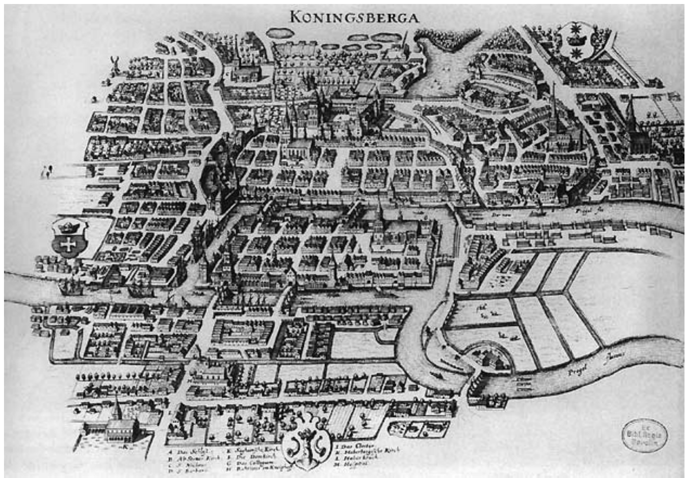
Fue G. Leibniz (1646–1716) el primero que parece referirse a este tipo de problemas y con el nombre anterior *Geometria situs*, como atestigua L. Euler (1707–1783) en *Solutio Problematis ad Geometriam Situs Pertinentis* publicado en 1736, que constituye lo que podríamos llamar el origen de la Topología y en cuyo comienzo, Euler escribe lo siguiente.

> *Además de esta parte de la geometría que trata de las magnitudes y que desde siempre ha sido cultivada con mucho celo, existe otra completamente desconocida hasta nuestros días, de la que Leibniz habló por primera vez y que llama "Geometria Situs". Según él, esta parte de la geometría se ocupa de determinar solamente la posición y buscar las propiedades que resulten de esta posición; en este trabajo no es necesario considerar las magnitudes por sí mismas, ni calcular; pero aún no está muy bien establecido cuáles son los problemas de este tipo que pertenecen a la "Geometria Situs" y cuál es el método que hay que utilizar para resolverlos; es por lo que, cuando recientemente se me presentó un problema que parecía ligado a la geometría ordinaria, pero cuya solución no dependía de la determinación de las magnitudes ni del cálculo de las cantidades, no he dudado en relacionarlo con la "Geometria Situs", tanto por las consideraciones de posición que únicamente entran en la solución, como porque el cálculo no interviene para nada. Por tanto, he creído útil expresar aquí, como un ejemplo de la "Geometria Situs", el método que he encontrado para resolver los problemas de este género.*

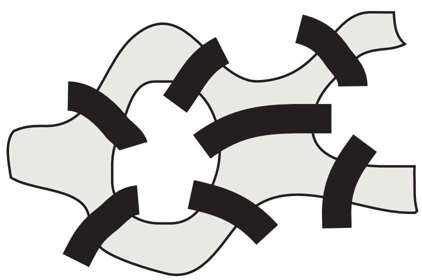
El problema al que se refiere Euler es ...

El problema de los puentes de Königsberg

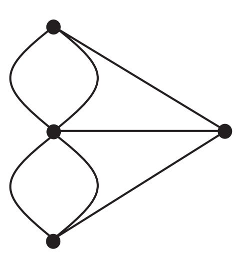
El río Pregel atraviesa la ciudad de Königsberg formando una isla a partir de la cual el río continua con dos brazos como se puede apreciar en el plano de la ciudad en la época de Euler.



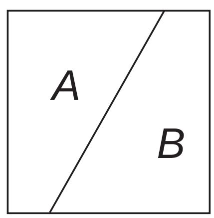
Dicha isla está unida a la ciudad por siete puentes cuyo esquema puede verse de una manera más clara en el siguiente gráfico:



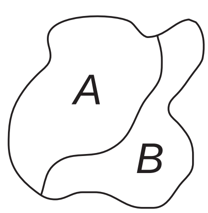
El problema consistía en determinar si una persona que partiera de un lugar determinado de la ciudad podría regresar al punto de partida tras cruzar cada puente una sola vez. Parece claro que en este problema son intrascendentes las dimensiones; no importa la longitud de los puentes, la anchura del río o el tamaño de la isla o la ciudad; lo que realmente caracteriza el problema es la *situación* de los puentes, la ciudad y la isla. Euler demostró que el problema era equivalente (topológicamente equivalente) a recorrer el siguiente gráfico con un lápiz sin levantarlo del papel, de manera que se empiece en un punto y se regrese a él recorriendo cada camino una sola vez.



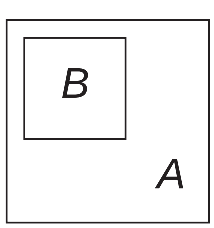
Podemos reflexionar sobre este problema durante unos minutos; no obstante, puestos a jugar, y con el fin de comprender mejor estos problemas, pensemos que una figura está dibujada en una superficie de goma que se puede deformar: estirar, retorcer, encorvar, etc., es decir, modificaciones que llevan consigo cambios del tamaño o de la forma de la figura original. No valen transformaciones como cortar, hacer agujeros, pegar otro trozo, etc. Las primeras son transformaciones que podemos llamar continuas, son transformaciones que no cambian la topología de la figura y que dan lugar a la misma figura, topológicamente hablando; las segundas no son continuas, llevan consigo algún tipo de ruptura, no son topológicas y, consecuentemente, no dan lugar a la misma figura desde el punto de vista topológico. Por ejemplo, dibuje un cuadrado dividido en dos regiones A y B mediante un segmento como el de la figura:

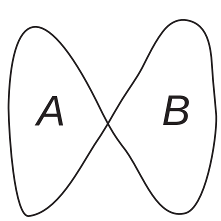


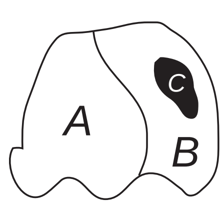
Podemos estirar o retorcer la superficie de goma, pero las dos regiones estarán separadas por una linea y las letras A y B no podrán estar nunca en la misma región. El cuadrado anterior es topológicamente equivalente a la figura siguiente:



Sin embargo, no es topológicamente equivalente a ninguna de las situaciones que se muestran en las tres figuras siguientes:

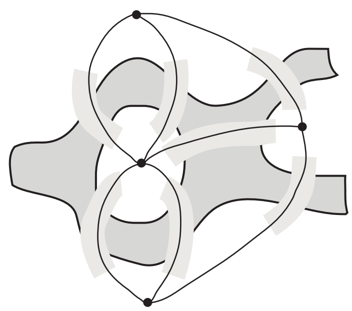






En la primera, la región B está contenida totalmente en la región A; en la segunda, las dos regiones no tienen un “lado” en común sino sólo un punto, y en la tercera hemos hecho un agujero. (En el libro *Aventuras topológicas* de J.L. Carlavilla y G. Fernández, Ed. RUBES, 1994, se pueden encontrar numerosos e interesantes problemas “topológicos”.)

Ahora es más comprensible por qué Euler concluyó que el problema de los puentes de Königsberg era equivalente al del gráfico que proponíamos antes:



Para terminar de ilustrar estas ideas, digamos que en el clásico libro *Topología General* (Ed. EUDEBA, 1975), el autor John L. Kelley escribe en una nota a pie de página lo siguiente: *“un topólogo es un señor que no sabe la diferencia entre una rosca (bizcocho en forma de anillo) y una taza de cafe”*. Si pensamos que el rosco está hecho de una masa elástica, por ejemplo plastilina, un hábil modelador podría efectuar una transformación topológica para, sin hacer rupturas y respetando el agujero central de la rosca, llegar a la taza de café haciendo que dicho agujero sea el del asa y viceversa.

Un poco más de historia

Antes de hacer un recorrido histórico más concreto, una nueva cita, esta vez del profesor J.M. Rodríguez Amilibia en el prólogo del libro *Introducción a la Topología* (J. Margalef y E. Otourelo, Ed. Complutense, 1993):

> *Cuando un topólogo es invitado a dar una conferencia, o a escribir unas líneas sobre el significado de la Topología, no es raro que comience hablando de toros y de tazas de café; de superficies y de bandas de Möbius; de botellas de Klein y planos proyectivos; y tal vez coja una cuerda y comience a mostrarnos prácticamente la teoría de nudos. Pero el mismo topólogo, una vez en clase, no dirá nada de eso, y partiendo de un método axiomático, frío y duro como un trozo de acero, nos hablará de entornos, de abiertos, de espacios conexos, de compactificaciones, de redes, etc.*

Eso es, precisamente, lo que vamos a hacer aquí. Las razones de esto vienen a coincidir con las que el propio profesor Rodríguez Amilibia aduce en el citado prólogo; hay que buscarlas en la evolución histórica de la Topología y en su vinculación con otras áreas.

Como indicaba Euler, podríamos decir que la Topología surge como una hermana pequeña de la Geometría, pero pronto se hace mayor y permite el estudio de nuevos problemas e incluso de problemas antiguos con perspectivas diferentes. Se vincula con otras ramas como el Análisis interactuando mutuamente. Una de las consecuencias es que podemos dividir la Topología en dos grandes ramas que tienen desarrollos paralelos y cuya vinculación no es demasiada: la Topología Algebraica y la Topología General (que estudia los conjuntos de puntos). Esta última es el objeto del presente curso y tiene sus primeras aproximaciones en el s. XIX.

Un breve recorrido cronológico

J.B. Listing (1808–1882) fue el primero en utilizar la palabra topología en un artículo cuyo título fue *Vorstudien zur Topologie* (Introducción al estudio de la Topología), aunque no se puede decir que éste fuera el comienzo de una rama consolidada como tal. Listing hace un trabajo, digamos parcial, sobre la conexión de superficies. Lo cierto es que en el s. XIX hubo una gran preocupación por la búsqueda del rigor en las definiciones y conceptos (límite, continuidad, etc.), intentando abandonar las ideas más intuitivas que se habían ido manejando hasta entonces; esto y, entre otras cosas, los trabajos de G. Cantor (1845–1918) sobre conjuntos dan pie a plantearse la necesidad de extender conceptos, basados esencialmente en los números, a otros conjuntos cuyos elementos eran diferentes: funciones, curvas, etc. Se hacen esfuerzos en la elaboración de una teoría de espacios abstractos que permita sistematizar todas estas ideas que son vislumbradas por algunos matemáticos. Hasta consolidar el tratamiento axiomático definitivo, son numerosas las aproximaciones que se van haciendo y que resumimos a continuación.

Algún autor atribuye la paternidad de la Topología a B. Riemann (1826–1866), aduciendo que se acerca a la noción actual de espacio topológico como una teoría autónoma y que incluso concibe un programa de estudios al respecto; no obstante, sus ideas todavía quedaban un poco lejos de lo que sería la propia Topología.

También H. Poincaré (1854–1912) contribuye con su obra *Analysis situs* (1895) haciendo un estudio muy riguroso sobre conexión vinculado a lo que actualmente se llama Topología Algebraica; algún autor escribe que, de no ser por lo disperso de su quehacer matemático (Poincaré estudió de casi todo), suya habría sido la sistematización a que nos venimos refiriendo; en todo caso, también hay que decir que Poincaré mostró poco interés sobre la Topología conjuntista, como muestra su intervención en el Congreso Internacional de Matemáticas de 1908, donde se refirió a la teoría de conjuntos de Cantor como una enfermedad de la que las generaciones posteriores estarían curadas.

F. Riesz (1880–1956) y M. Fréchet (1878–1973) hacen importantes trabajos que suponen una nueva aproximación; de hecho, Fréchet introduce los espacios métricos en su tesis doctoral (1906).

Concluyamos diciendo que la primera definición de espacio topológico en términos de entornos fue dada en 1914 por F. Hausdorff (1868–1942), partiendo de los trabajos de Riesz, añadiendo la propiedad de separación de puntos (que se conoce como propiedad T_2 o de Hausdorff), que más adelante sería eliminada de la definición. Las definiciones de espacios topológicos en términos de abiertos son obra de P. Alexandroff (1896–1982) en 1926 y W. Sierpinski (1882–1969) en 1928. A partir de entonces la Topología ha ido evolucionando y revelándose, como decíamos al comienzo, como una rama fundamental en la formación de cualquier matemático actual.

Algunos nombres propios de la Topología

G. Leibniz (1646–1716)

Aunque es una figura destacada dentro del Cálculo, fue el primero que se refirió como *Geometria Situs* (Geometría de la posición) a problemas en los que no intervenían las magnitudes: estaba intentando resolver problemas combinatorios de posición. Se puede considerar como un precursor de la teoría de grafos y de la Topología.

L. Euler (1707–1783)

Publicó en 1736 el primer trabajo sobre Geometría de la posición, con el problema de *Los puentes de Königsberg*, donde se dio cuenta de que existía un nuevo tipo de Geometría donde la distancia no es relevante. En 1752 enunció su conocido teorema que relaciona el número de caras C, de aristas A y de vértices V de un poliedro: $C - A + V = 2$.

J.B. Listing (1808–1882)

Es el primero en utilizar la palabra topología en su libro *Vorstudien zur Topologie*, pero se trata de un trabajo parcial. En 1862 publicó *Der Census raumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern* en el que estudiaba diversas generalizaciones de la fórmula de Euler.

B. Riemann (1826–1866)

En 1851 Riemann defendió su tesis doctoral, que contiene importantes ideas tanto topológicas como analíticas, como por ejemplo las superficies de Riemann y sus propiedades. Concibió las ideas cercanas a lo que después sería la Topología como una teoría autónoma.

G. Cantor (1845–1918)
En 1874 publicó su primer artículo sobre teoría de conjuntos, donde describía rigurosamente la noción de infinito y probaba el controvertido resultado de que casi todos los números reales son trascendentes. Con sus estudios sobre conjuntos dio pie a la formulación de ideas "topológicas"; él mismo proporcionó las primeras definiciones de conjunto derivado y punto límite.

F. Hausdorff (1868–1942)

Figura indiscutible de la topología y la teoría de conjuntos, introdujo la idea de conjunto parcialmente ordenando en 1906. En 1907 introdujo tipos especiales de ordinales en un intento de probar la hipótesis del continuo. En 1914 publicó *Grundzüge der Mengenlehre* donde presentó la primera definición axiomática de espacio topológico.

M.R. Fréchet (1878–1973)

Introdujo la idea de conjunto compacto, aunque actualmente dicho concepto se denomina *compacidad por punto límite o de acumulación*. También introdujo en 1906 los espacios métricos y probó que las ideas de Cantor de subconjuntos abiertos y cerrados podían extenderse de manera natural a los espacios métricos.

F. Riesz (1880–1956)

Trabajó sobre las ideas de Fréchet expuestas en su tesis doctoral, proporcionando un vínculo entre los trabajos de Lebesgue (sobre funciones reales) y Hilbert (sobre ecuaciones integrales). Introdujo el concepto de convergencia débil de una sucesión de funciones y realizó una aproximación a la definición axiomática de espacio topológico.

W. Sierpinski (1882–1969)
Comenzó a interesarse en la teoría de conjuntos en 1907 y en 1912 publicó su libro *Outline of Set Theory*. En los años 20 amplió su interés a la topología general, realizando contribuciones importantes en el axioma de elección y la hipótesis del continuo. Particularmente famosa es la *curva de Sierpinski*, que llena todo el cuadrado unidad.

P. Alexandroff (1896–1982)
En 1922 introdujo, junto con Uryshon, los espacios numerablemente compactos, localmente compactos y compactos, tal y como se conocen actualmente. En 1928, estando en la Universidad de Princeton, decidió junto con Hopf publicar una obra, en 3 volúmenes, sobre Topología, que no vería la luz hasta 1935. En ella, presentó la definición de espacio topológico en términos de conjuntos abiertos.