Capítulo 1

Ejercicios y Problemas

P.1.1 Sea $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(m, n) = |m^2 - n^2|$. ¿Es $(\mathbb{N}, d)$ un espacio métrico? Justifique la respuesta.

Indicación: Utilice las propiedades del valor absoluto junto al hecho de que, como se trata de números naturales $n^2 = m^2$ si, y sólo si, $n = m$.

P.1.2 Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre que se cumple

$$|d(x, y) - d(z, t)| \leq d(x, z) + d(y, t)$$

para todo $x, y, z, t \in X$.

Indicación: Utilice la propiedad $|x| \leq r$ si, y sólo si, $-r < x < r$ en combinación con una adecuada elección de puntos en la desigualdad triangular de d. Observe la demostración de la Proposición 1.1.4

Resolución: Demostraremos que

$$-d(x, z) - d(y, t) \leq d(x, y) - d(x, z) \leq d(x, z) + d(y, t).$$

Aplicando la desigualdad triangular $d(z, t) \leq d(z, x) + d(x, y) + d(y, t)$, y cambiando el signo $-d(z, t) \geq -d(z, x) - d(x, y) - d(y, t)$ de donde se obtiene la desigualdad de la izquierda $-d(x, z) - d(y, t) \leq d(x, y) - d(x, z)$. Haciendo algo similar aplicando ahora la desigualdad triangular a $d(x, y)$ obtenemos la desigualdad de la derecha.

P.1.3 Sea X un conjunto. Demuestre que una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una distancia si, y sólo si, para $x, y, z \in X$, se verifican

(a) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(b) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Indicación: Demuestre que es no negativa aplicando la desigualdad (b) (no es la desigualdad triangular), tomando $y = x$ y la simetría con la misma desigualdad y $z = x$. Deduzca entonces la desigualdad triangular.

P.1.4 Sea (X, d) un espacio métrico. Se definen δ, y ρ y η como sigue:

$$\begin{aligned}
\delta(x, y) &= kd(x, y), \qquad k \in \mathbb{R}^+ \\
\rho(x, y) &= \min\{1, d(x, y)\} \\
\eta(x, y) &= [d(x, y)]^2
\end{aligned}$$

Demuestre que δ y ρ son distancias sobre X, pero que η no tiene por qué ser necesariamente una distancia.

Indicación: El caso de δ es una mera comprobación. En el caso de ρ, para la desigualdad triangular, utilice la desigualdad triangular de d y propiedades del mínimo.

P.1.5 Sea X un conjunto y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación inyectiva. Demuestre que la aplicación $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia sobre X.

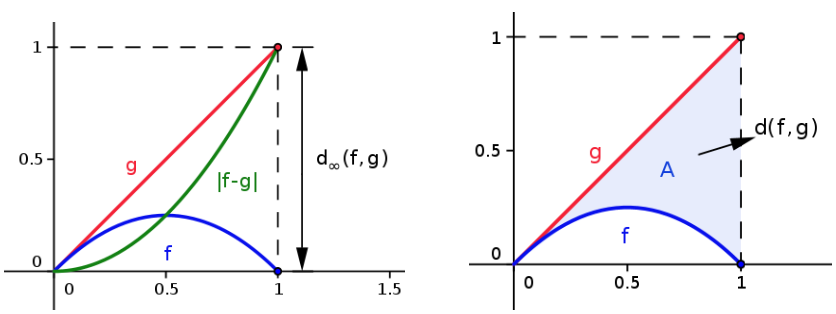
Indicación: Verificar las propiedades se reduce a una mera comprobación utilizando las propiedades del valor absoluto, excepto la demostración de que $d(x, y) = 0$ es equivalente a que $x = y$, donde debe utilizar la inyectividad de f.

P.1.6 Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente. Demuestre que $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia sobre $\mathbb{R}$

Indicación: Utilice el Problema **P.1.5** anterior.

P.1.7 Considere el conjunto $\mathcal{C}([0, 1])$ de las funciones reales continuas en el intervalo $[0, 1]$. Sean $f(x) = x(1 - x)$ y $g(x) = x$. Calcule $d_\infty(f, g)$ y $d(f, g)$ según la definición que se da en el Ejemplo **Ej.1.7.**.

Indicación: Para el caso d_∞ sólo tiene que calcular el valor absoluto de la diferencia y estudiar sus extremos (vea la Figura 1.12 (a)). Para d debe calcular el área comprendida entre las dos curvas (vea la Figura 1.12 (b)).



(a) (b)

Figura 1.12 – Gráficos de $d_\infty(f, g)$ (a) y $d(f, g)$ (b).

P.1.8 Estudie las distancias que, sobre $\mathbb{R}$, inducen d_1 y d_∞ consideradas sobre $\mathbb{R}^2$. ¿Y si considera las distancias d_1, d_2 y d_∞ sobre $\mathbb{R}^n$ e intenta calcular las que inducen, respectivamente, sobre $\mathbb{R}^{n-k}$, con $1 < k < n$?

P.1.9 Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ definido como $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x^2\}$. Calcule explícitamente las distancias inducidas sobre A por d_1, d_2 y d_∞.

P.1.10 Consideremos $\mathbb{R}$ con la distancia usual $d(x, y) = |x - y|$ y el conjunto $A = (1, 2] \subset \mathbb{R}$. Responda las siguientes cuestiones justificando las respuestas:

1. ¿Cuánto vale $d(\frac{3}{2}, A)$? 0, $-\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{2}$.
2. ¿Cuánto vale $d(1, A)$? $\frac{1}{2}$, 0 o $\frac{1}{4}$
3. ¿Cuánto vale $d(0, A)$? 1, $\frac{1}{2}$ o 0

P.1.11 Si (X, d) es un espacio métrico y $A, B \subset X$ no vacíos, demuestre que

$$d(A, B) = \text{ínf}\{d(y, A) : y \in B\} = \text{ínf}\{d(x, B) : x \in A\}.$$

P.1.12 Considere $\mathbb{R}$ con la distancia usual y $A = \{1/n + (-1)^n : \ n \in \mathbb{N}\}$. Calcule $d(1, A)$ y $d(-1, A)$.

Indicación: Observe que se trata de una sucesión, escriba algunos términos y estudie la relación existente entre 1 y -1 y A

P.1.13 Sea (X, d) un espacio métrico. En el Problema **P.1.4** hemos visto que la aplicación $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\rho(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}$, es una distancia. Considere el espacio $(\mathbb{R}^2, \rho)$ con $\rho(x, y) = \text{mín}\{1, d_2(x, y)\}$ y el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Halle los puntos de $\mathbb{R}^2$ que verifican $\rho(x, A) = 1$.

P.1.14 Sea $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y < 1, \ x > 0, \ y > 0\}$. Calcule el diámetro de A.

P.1.15 Definimos la aplicación $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \begin{cases} |x_2 - y_2| & \text{si } x_1 = y_1 \\ |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| & \text{si } x_1 \neq y_1 \end{cases}$$

Pruebe que d es una distancia sobre $\mathbb{R}^2$. Determine y represente gráficamente las bolas $B((0, 0), 1)$, $B((1, 0), 1)$, $B((0, 1), 1)$ y $B((2, 3), 1)$.

Resolución: Veamos que se trata de una distancia. la propiedad primera (no negativa) se cumple ya que se trata o bien de un valor absoluto, o bien de sumas de valores absolutos. Respecto a la propiedad (2), supongamos que $d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = 0$; entonces, si $x_1 = y_1$, la distancia es $d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = |x_2 - y_2| = 0$ y por tanto $x_2 = y_2$, luego los puntos coinciden. Si fuera $x_1 \neq y_1$ se tendría $|x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| = 0$, que al ser una suma de números no negativos, deberían ser todos cero, lo que llevaría a que $x_1 = y_1$, en contra de lo supuesto; lo que significa que este segundo caso no se puede dar. Recíprocamente si suponemos que $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, la distancia se calcula mediante el primero de los casos y, evidentemente la distancia es cero.

La simetría se deduce de la simetría del valor absoluto. Por último comprobemos la desigualdad triangular; supongamos en primer lugar que se cumple $x_1 = y_1 = z_1$, entonces aplicamos la desigualdad triangular del valor absoluto y

$$d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = |x_2 - y_2| \leq |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| =$$

$$d[(x_1, x_2), (z_1, z_2)] + d[(z_1, z_2), (y_1, y_2)];$$

si ahora es $x_1 = y_1$, pero $z_1 \neq x_1$ tenemos

$$d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = |x_2 - y_2| \leq |x_2| + |y_2| \leq$$

$$|x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| + |z_2| + |z_1 - y_1| + |y_2| =$$

$$d[(x_1, x_2), (z_1, z_2)] + d[(z_1, z_2), (y_1, y_2)].$$

Supongamos ahora que $x_1 \neq y_1$ y $z_1 \neq x_1$, $z_1 \neq y_1$; entonces

$$d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| \leq |x_2| + |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |y_2| \leq$$

$$|x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| + |z_2| + |z_1 - y_1| + |y_2| =$$

$$d[(x_1, x_2), (z_1, z_2)] + d[(z_1, z_2), (y_1, y_2)].$$

Para finalizar supongamos que $x_1 \neq y_1$ y $z_1 = y_1$, entonces

$$d[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = |x_2| + |x_1 - y_1| + |y_2| \leq$$

$$|x_2| + |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |y_2 - z_2 + z_2| \leq$$

$$|x_2| + |x_1 - z_1| + |z_2| + |y_2 - z_2| (\text{ pues } z_1 - y_1 = 0) =$$

$$d[(x_1, x_2), (z_1, z_2)] + d[(z_1, z_2), (y_1, y_2)].$$

Con esto hemos demostrado que se trata de una distancia. Estudiemos a continuación las bolas.

En primer lugar $B((0, 0), 1) = \{(x, y) : d((0, 0), (x, y) < 1\}$; veamos qué puntos son: si $x = 0$, entonces $d((0, 0), (0, y)) = |y| < 1$, de modo que se trata del segmento vertical, sobre el eje Y que va del punto $(0, -1)$ al $(0, 1)$, excluidos ambos extremos (véase la Figura 1.13(a)); a este conjunto hay que unirle los que verifican que $x \neq 0$, y entonces $d((0, 0), (x, y)) = |x| + |y| < 1$ y este conjunto ya lo hemos estudiado en el Ejemplo **Ej.1.21.**; se trata del rombo, sin el "borde", con vértices en $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$ y esta es la bola buscada puesto que el segmento anterior está contenido en el rombo (véase la Figura 1.13(b)). De forma similar puede encontrar el resto de las bolas que se piden.

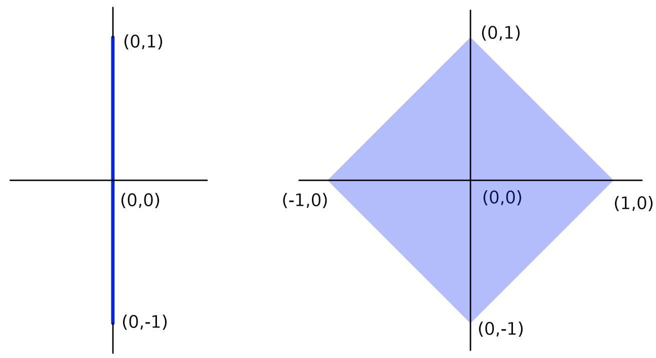


Figura 1.13 – La bola $B((0,0),1)$.

P.1.16 Se define la parte entera de un número real $x \in \mathbb{R}$ como $[x] =$ *el mayor número entero menor o igual que* x. Sea la aplicación $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\rho(x,y) = |[x] - [y]| + |(x - [x]) - (y - [y])|.$$

(a) Pruebe que ρ es una distancia en $\mathbb{R}$.

(b) Estudie cómo son las bolas $B_\rho(0,1)$ y $B_\rho(\frac{3}{2},1)$ ¿Cómo son las bolas abiertas?

(c) Pruebe que ρ y la distancia $d(x) = |x-y|$ inducen la misma distancia en el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros.

P.1.17 Pruebe que la aplicación definida como

$$d(x,y) = \text{máx}\{|x_1 - x_2|, d_D(y_1,y_2)\}, \quad \text{con} \quad x = (x_1,y_1), y = (x_2,y_2),$$

es una distancia en $\mathbb{R}^2$. Determine cómo son las bolas.

Resolución: La aplicación d es no negativa puesto que se trata del máximo entre dos distancias. Por otra parte, si $d(x,y) = 0$, entonces $|x_1 - x_2| = 0$ y $d_D(y_1 - y_2) = 0$ de donde se deduce que $x = y$; recíprocamente, si $x = y$ es claro por la propia definición de d, que $d(x,y) = 0$. La simetría de d es inmediata a partir de la simetría del valor absoluto y de d_D. Por último para la desigualdad triangular, tenemos que si $d(x,y) = |x_1 - x_2|$, entonces, si $z = (x_3,y_3)$,

$$d(x,y) = |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| \leq$$

$$\text{máx}\{|x_1 - x_3|, d_D(y_1,y_3)\} + \text{máx}\{|x_3 - x_2|, d_D(y_3,y_2)\} = d(x,z) + d(z,y).$$

Se procede de forma análoga si $d(x,y) = d_D(y_1,y_2)$.

Respecto a las bolas, $B((a,b),r) = \{(x,y) : \text{máx}\{|x-a|, d_D(y,b)\} < r\}$, de modo que debe ocurrir que $|x-a| < r$ y $d_D(y,b) < r$; si $r \leq 1$, entonces $d_D(y,b) = 0$, luego $y = b$, y $|x-a| < r$ significa que la primera coordenada de los puntos de la bola está en el intervalo $(a-r, a+r)$, es decir se trata del segmento $\{(x,b) : x \in (a-r, a+r)\}$. Si $r > 1$, entonces todos los puntos cumplen $d_D(y,b) < r$ y $|x-a| < r$ implica, otra vez que $x \in (a-r, a+)$ luego la bola es la banda vertical $\{(x,y) : x \in (a-r, a+r), y \in \mathbb{R}\}$.

P.1.18 Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$d(x,y) = \frac{2|x-y|}{1+3|x-y|}.$$

Compruebe que es una distancia y determine la bola $B_d(0,r)$.

Indicación:Para la desigualdad triangular puede demostrar, y des pues utilizar, el hecho de que la función $f(t) = \frac{2t}{1+3t}$ con $t \geq 0$ es creciente.

P.1.19 Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la distancia definida por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ d_D(x,0) + d_D(0,y) & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

siendo d_D la distancia discreta. Determine analítica y geométricamente las bolas $B_d(x,r)$.

Indicación: Estudie en primer lugar el caso $x = 0$.

P.1.20 Sea $\mathcal{C}([0,2\pi])$ con la distancia del supremo. Describa analítica y gráficamente cómo son las bolas de radio 1 y centro en las funciones $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 2 + \cos x$, respectivamente.

P.1.21 Justifique si son abiertos los siguientes conjuntos en $(\mathbb{R}^2, d_2)$:

$A=$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$

$B=$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}\}$

$C=$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$

$D=$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\}$

Indicación: Represéntelos gráficamente y busque según los casos, bolas adecuadas.

P.1.22 Demuestre que el intervalo $H = [a,b]$ es abierto en (H, d_H), pero que no lo es en el espacio total $\mathbb{R}$ con la distancia euclídea.

P.1.23 Sea (X,d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Demuestre que el conjunto $\{x \in X :\ d(a,x) > r\}$ es abierto.

Indicación: Demuestre que contiene una bola centrada en cada uno de sus puntos buscando el radio adecuado para cada punto.

Resolución: Si $x \in \{x \in X : \ d(a,x) > r\}$, tomemos $s = d(x,a) - r$ y veamos que, precisamente $B(x,s) \subset \{x \in X : \ d(a,x) > r\}$. En efecto, si $y \in B(x,s)$, entonces $d(x,y) < s = d(x,a) - r \leq d(x,y) + d(y,a) - r$; por tanto $d(y,a) > r$, lo que significa que $y \in \{x \in X : \ d(a,x) > r\}$.

P.1.24 Sea (X,d) un espacio métrico, $a \in X$ y $r > 0$. Demuestre que el conjunto $\{x \in X : \ d(a,x) \geq r\}$ es un conjunto cerrado.

P.1.25 Considere el espacio métrico de las sucesiones reales acotadas (ℓ^∞, d_∞). Pruebe que el conjunto $A = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ es cerrado. **Indicación**: Intente ver que el complementario es un abierto. ¿Cuál es el complementario de A?

Resolución: Veamos que el complementario es abierto. A^c es el subconjunto de las sucesiones acotadas que no convergen a cero (es decir sucesiones que, teniendo límite, éste no es cero, o sucesiones que son acotadas y no convergentes. En definitiva si $(y_n)_n \in A^c$ significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $n_y > n$ con $|y_{n_y}| > 2\varepsilon$; fijemos esta sucesión y veamos que hay una bola de centro $(y_n)_n$ contenida en A^c lo que implicará que este último conjunto es abierto.

Si $(x_n)_n \in A$, para el $\varepsilon > 0$ anterior, existe n_0 tal que $n > n_0$ implica que $|x_n| < \varepsilon$. Entonces según lo señalado más arriba, existe $n_y > n_0$ tal que $|y_{n_y}| > 2\varepsilon$, entonces

$$|y_{n_y} - x_{n_y}| > ||y_{n_y}| - |x_{n_y}|| > |2\varepsilon - \varepsilon| = \varepsilon.$$

Esto implica que en la bola $B_\infty((y_n)_n, \varepsilon)$ no hay ninguna sucesión convergente a cero (como la distancia es el supremo, $d_\infty((x_n)_n, (y_n)_n) > \varepsilon$); es decir $B_\infty((y_n)_n, \varepsilon) \subset A^c$.

P.1.26 Demuestre que las tres distancias d_1, d_2 y d_∞ en $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, de modo que generan la misma topología métrica (que coincide con la topología usual). En particular, en el caso $n = 1$, las tres distancias son iguales a la distancia usual de $\mathbb{R}$, que viene dada por el valor absoluto.

Indicación: Puede ver que cada bola abierta para cada una de las distancias, contiene una bola para las otras dos distancias, de radio adecuado y centrada en cada punto (puede resultarle útil repasar el Ejemplo **Ej.1.28.**).

P.1.27 En $\mathcal{C}([0,1])$ consideremos la distancia d_∞ y la distancia del área:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx.$$

Sea $0 < r \leq 2$ y consideremos las funciones f y g definidas por

$$f(x) = 2 \ \text{ para todo } \ x \in [0,1] \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} -\dfrac{4x}{r} + 4 & \text{si } \ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}r \\ \quad 2 & \text{si } \ \frac{1}{2}r \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Pruebe que $g \in B_d(f, r)$ pero $g \notin B_\infty(f, 1)$. Deduzca que d y d_∞ no son equivalentes.

Indicación: Sólo tiene que hacer los cálculos.

P.1.28 Sea (X, d) un espacio métrico. Definimos

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

(a) Demuestre que se trata de una distancia.

(b) Una distancia d es acotada, si existe $M > 0$ tal que $d(x, y) \leq M$ para todo x, y. Demuestre que tanto δ como $\rho(x, y) = \text{mín}\{1, d(x, y)\}$ (véase el Problema **P.1.4**), son acotadas.

(c) Demuestre que d, δ y ρ son equivalentes.

(d) Si d es la distancia usual de $\mathbb{R}$, determine las bolas en $(\mathbb{R}, \rho)$ y en $(\mathbb{R}\delta)$.

P.1.29 Si X es un conjunto e (Y, d) es un espacio métrico, sea $\mathcal{A}(X, Y)$ el conjunto de las aplicaciones acotadas de X en Y, es decir $f \in \mathcal{A}(X, Y)$ si $f(X) \subset Y$ es un conjunto acotado. Demuestre que la aplicación $d_\infty : \mathcal{A}(X, Y) \times \mathcal{A}(X, Y) \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\},$$

es una distancia (***distancia del supremo***).

P.1.30 Sea $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ una función estrictamente creciente verificando:

(a) $f(0) = 0$;

(b) Si $x, y \geq 0 \Rightarrow f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Si (X, d) es un espacio métrico, pruebe que la aplicación $d' = f \circ d$, es decir, $d'(x, y) = f(d(x, y))$, es también una distancia sobre X.

Indicación: Combine las propiedades de la distancia d y de la función f.

Resolución: Observemos que $f(x) \geq 0$ ya que f es estrictamente creciente y según (a) $f(0) = 0$; por tanto $d'(x, y) \geq 0$. Para ver la propiedad (2) de distancia, tenemos que $d'(x, y) = 0$ es equivalente a que $f(d(x, y)) = 0$ que, como f es inyectiva por ser estrictamente creciente, también equivale a que $d(x, y) = 0$, de nuevo equivalente a $x = y$. La simetría se deduce directamente de la simetría de d. Por último para la desigualdad triangular aplicamos la propiedad (b) de f y su crecimiento estricto:

$$d'(x, y) = f(d(x, y)) \leq f(d(x, z) + d(z, y)) \leq$$
$$f(d(x, z)) + f(d(z, y)) = d'(x, z) + d'(z, y).$$

P.1.31 Sea $(\mathbb{R}^2, d_2)$ y consideremos el subconjunto A dado por

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-2)^2+y^2 \leq 2\} \bigcup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x+2)^2+y^2 \leq 2\}.$$

Determine en $(A, d_2|_A)$ la bola cerrada de centro $(0,0)$ y radio 1.

P.1.32 En $\mathbb{R}$ con la topología usual, se verifican:

1. Un conjunto es abierto, si y sólo si, se puede expresar como unión de intervalos abiertos.
2. Más aún, un conjunto es abierto si, y sólo si, es unión de una colección numerable de intervalos abiertos disjuntos.

P.1.33 Si, en la definición de distancia, la condición *(2)* se cambia por *(2')* "*si* $x \in X$*, entonces* $d(x,x) = 0$" (admitimos la posibilidad de la existencia de $x, y \in X$ distintos con $d(x,y) = 0$), entonces se dice que d es una ***pseudométrica***.

Sea, entonces d una pseudométrica sobre un conjunto X. Definimos la siguiente relación:

$$x \sim y, \quad \text{si, y sólo si} \ \ d(x,y) = 0$$

1. Demuestre que se trata de una relación de equivalencia.
2. Demuestre que la siguiente aplicación es una distancia sobre el conjunto cociente $X/\sim = \{\hat{x} : x \in X\}$ ($\hat{x}$ es la clase de equivalencia de x); $\rho(\hat{x}, \hat{y}) = d(x,y)$.

Indicación: Compruebe que la definición de ρ no depende del representante elegido y después demuestre que se trata de una distancia apoyándose en que d es pseudométrica y la relación es de equivalencia.

Resolución: Veamos que se trata de una relación de equivalencia:

- Reflexiva. $x \sim x$ por (2').
- Simétrica. Se deduce de la simetría de d.
- Transitiva. Si $x \sim y$ e $y \sim z$, entonces $d(x,y) = d(y,z) = 0$ y según la desigualdad triangular $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = 0$, de donde $d(x,z) = 0$ y $x \sim z$.

Comprobemos ahora que ρ está bien definida viendo que no depende del representante elegido, es decir, que si $x, x' \in \hat{x}$ e $y, y' \in \hat{y}$, entonces $\rho(\hat{x}, \hat{y}) = d(x,y) = d(x',y')$. En efecto, $d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y)$ y como $d(x,x') = d(y',y) = 0$, tenemos que $d(x,y) \leq d(x',y')$; la desigualdad en sentido contrario se obtiene de igual forma empezando por $d(x',y')$. Sólo resta comprobar que ρ es una distancia sobre $X/\sim$.

- $\rho \geq 0$ por serlo d.

- $\rho(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ equivale a que $d(x, y) = 0$ que, a su vez es equivalente a que $x \sim y$, es decir x e y están en la misma clase de equivalencia, $\hat{x} = \hat{y}$.
- La simetría de ρ se deduce de la de d.
- $\rho(\hat{x}, \hat{y}) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = \rho(\hat{x}, \hat{z}) + \rho(\hat{z}, \hat{y})$.