# Capítulo 2

## Ejercicios y Problemas

**P.2.1** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $H \subset X$. Dado $x \in H$, un subconjunto $V \subset H$ es un entorno relativo de $x$ ( $V \in \mathcal{U}_x^H$) si, y sólo si, existe $U$ entorno de $x$ en el espacio total ( $U \in \mathcal{U}_x$) de forma que $V = U \cap H$.

**Indicación**: Aplique la Proposición 1.3.8.

**Resolución**: Si $V$ es un entorno relativo de $x$, existe $B \subset H$ abierto tal que $x \in B \subset V$. Entonces existirá un abierto $A \subset X$ tal que $B = A \cap H$. Sea $U = A \cup V$; evidentemente $U \in \mathcal{U}_x$, pues $x \in B = A \cap H$ y $x \in A \subset A \cup V$. Además:

$$U \cap H = (A \cup V) \cap H = (A \cap H) \cup (V \cap H) = B \cup V = V.$$

Recíprocamente, sea $U \in \mathcal{U}_x$ y tomemos $V = U \cap H$. Existe $A \subset X$ abierto tal que $x \in A \subset U$. Entonces $x \in A \cap H \subset U \cap H = V$.

**P.2.2** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $x \in H \subset X$. Si $\mathcal{B}_x$ es una base de entornos de $x$ en $(X, d)$, la familia $\mathcal{B}_x^H = \{B \cap H : B \in \mathcal{B}_x\}$ es una base de entornos para la distancia relativa.

**Indicación**: Utilice el problema **P.2.1**.

**Resolución**: Evidentemente $\mathcal{B}_x^H \subset \mathcal{U}_x^H$. Sea $V \in \mathcal{U}_x^H$; entonces $V = U \cap H$, con $U \in \mathcal{U}_x$. Por tanto, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subset U$; de manera que entonces $B \cap H \subset U \cap H = V$ y $B \cap H \in \mathcal{B}_x^H$.

**P.2.3** Demuestre que, en un espacio métrico, todo punto tiene una base de entornos numerable.

**Indicación**: Vea que tomando las bolas de radio $1/n$, con $n \in \mathbb{N}$, se obtiene el resultado.

**P.2.4** En $\mathbb{R}$ con la topología (distancia) usual, estudie si los siguientes intervalos son entornos de 0 o no lo son: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; $(-1, 0]$; $\left[0, \frac{1}{2}\right)$; $(0, 1]$.

**P.2.5** Considere el espacio métrico $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Estudie cuáles de los siguientes conjuntos son entornos del origen de coordenadas:

- $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$
- $(-\frac{1}{2}, 0] \times (-1, 0]$
- $[0, \frac{1}{2}) \times (0, \frac{1}{4}]$
- $(0, 1] \times (0, \frac{1}{2}]$.

**P.2.6** Determine la clausura de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$, justificando adecuadamente su respuesta:

(1) $B = \{1/n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$.
(2) $C = \{0\} \cup (1, 2)$.
(3) $\mathbb{Q}$ (el conjunto de los números racionales).
(4) $\mathbb{N}$ (el conjunto de los números enteros).
(5) $\mathbb{R}_+$ (el conjunto de los números reales positivos).

**P.2.7** Demuestre que si $A$ es un cerrado en un espacio métrico y $x \notin A$, entonces $d(x, A) > 0$.

**Indicación**:Utilice la Proposición 2.2.7.

**P.2.8** Demuestre que una bola cerrada, en un espacio métrico, es la adherencia de la correspondiente bola abierta.

**P.2.9** Encuentre en $\mathbb{R}$ con la topología usual (o en $\mathbb{R}^2$), ejemplos de conjuntos $A$ y $B$, de manera que los conjuntos siguientes sean distitntos

$$A \cap \overline{B}, \quad \overline{A} \cap B, \quad \overline{A \cap B} \quad \text{y} \quad \overline{A} \cap \overline{B}.$$

**P.2.10** Si $A$ y $B$ son dos subconjuntos de un espacio métrico, demuestre que

$$\overline{(A \cap B)} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}.$$

El ejercicio **P.2.9** anterior le habrá proporcionado un ejemplo que muestre que la inclusión puede ser estricta.

**P.2.11** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $A \subset X$. Entonces un punto $x \in A$ es un punto interior de $A$ si, y sólo si, $d(x, X - A) > 0$.

**Indicación**: Observe la Proposición 2.2.7 y el Problema **P.2.7**.

**Resolución**: Hemos visto que $x$ es un punto interior de $A$ si, y sólo si, $x \notin \overline{X - A}$ (Proposición 2.4.4). Por otra parte, sabemos que $x \in \overline{X - A}$ si, y sólo si, $d(x, X - A) = 0$ (Proposición 2.2.7). Por tanto, $x$ es un punto interior de $A$ si, y sólo si, $d(x, X - A) \neq 0$.

**P.2.12** El interior posee las siguientes propiedades, que son duales de las correspondientes de la adherencia, probadas en la Proposición 2.2.6.

Sea $(X, d)$ un espacio métrico, y sean $A_1$ y $A_2$ subconjuntos de $X$. Entonces:

(a) Si $A_1 \subset A_2$, entonces $\overset{\circ}{A_1} \subset \overset{\circ}{A_2}$
(b) $\overset{\circ}{A_1} \cap \overset{\circ}{A_2} = (A_1 \cap A_2)^\circ$.

(c) $(A_1 \cup A_2)^\circ \supseteq \overset{\circ}{A}_1 \cup \overset{\circ}{A}_2$. Encuentre un ejemplo en el que se muestre que la inclusión puede ser estricta.

**Indicación**: En el apartado (b) puede usar la Proposición 2.4.4. (c) también es obvio.

**Resolución**: (a) Es obvio. (b) Según hemos visto en la Proposición 2.4.4:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{A}_1 \cap \overset{\circ}{A}_2 &= (X - \overline{X - A_1}) \cap (X - \overline{X - A_2}) = X - (\overline{X - A_1} \cup \overline{X - A_2}) \\ &= X - \overline{(X - A_1) \cup (X - A_2)} = X - \overline{X - (A_1 \cap A_2)} = (A_1 \cap A_2)^\circ.\end{aligned}$$

Por último (c) es obvio y la inclusión puede ser estricta; basta tomar los conjuntos $A_1 = [1,2]$ y $A_2 = [2,3]$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual.

**P.2.13** Sea $(X,d)$ un espacio métrico y $H \subset X$. Consideremos el subespacio métrico $(H, d_H)$ y sea $A \subset H \subset X$. Entonces

$$\operatorname{Int}_H A \supset \overset{\circ}{A} \cap H.$$

**Indicación**: Puede utilizar que $\operatorname{Int}_H A$ es el abierto relativo más grande incluido en $A$.

**Resolución**: Es claro que $\overset{\circ}{A} \cap H$ es un abierto de $H$ incluido en $A$. Por otra parte, $\operatorname{Int}_H A$ es el abierto relativo más grande incluido en $A$, luego se cumple $\overset{\circ}{A} \cap H \subset \operatorname{Int}_H A$.

**P.2.14** Compruebe que la inclusión anterior puede ser estricta considerando $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual; para ello compare el interior de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ y el interior de $\mathbb{Q}$ en el subespacio $\mathbb{Q}$

**P.2.15** Sea $(X,d)$ un espacio topológico y $A \subset X$. Entonces $A$ es abierto si, y sólo si, $\operatorname{Fr}(A) \cap A = \varnothing$.

**Indicación**: Utilice las caracterizaciones de la frontera.

**Resolución**: "$\Rightarrow$" Si $A$ es abierto entonces $A = \overset{\circ}{A}$, de modo que entonces $\operatorname{Fr}(A) = \overline{A} - A$ de donde se deduce $\operatorname{Fr}(A) \cap A = \varnothing$.

"$\Leftarrow$" Si $\operatorname{Fr}(A) \cap A = \varnothing$, entonces

$$\varnothing = \operatorname{Fr}(A) \cap A = (\overline{A} - \overset{\circ}{A}) \cap A = A - \overset{\circ}{A},$$

lo que significa que $A \subset \overset{\circ}{A}$. Por tanto, $A$ es abierto.

**P.2.16** En $(\mathbb{R}, d_u)$ se consideran los subconjuntos

$$A = [0,1), \quad B = \mathbb{Q} \cap [1,2], \quad C = (2,3] \cup \{4\}, \quad D = A \cup B \cup C.$$

Calcule las adherencias de $A$, $B$ y $C$ relativas a $D$, es decir $\overline{A}^D$, $\overline{B}^D$ y $\overline{C}^D$.

**P.2.17** En $(\mathbb{R}^2, d_2)$ calcule el interior, el exterior y la frontera de los conjuntos siguientes:
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/n,\ n \in \mathbb{N},\ 0 \leq y \leq 1\}$,
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$,
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = n,\ y = 1/n,\ n \in \mathbb{N}\}$

**P.2.18** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Demuestre que si $A \subset B$, entonces todo punto de acumulación de $A$ es un punto de acumulación de $B$, es decir, $A' \subset B'$.

**P.2.19** Demuestre que un conjunto $A$ es abierto en un espacio métrico $(X, d)$ si, y sólo si, para todo $M \subset X$ tal que $A \cap M = \varnothing$, también es $\overline{M} \cap A = \varnothing$.

**Indicación**: En la implicación directa suponga que $A \cap \overline{M} \neq \varnothing$ para llegar a una contradicción. En la implicación directa, puede tomar $M = X - A$ y, a partir de aquí, comprobar que $A$ es entorno de todos sus puntos.

**Resolución**: "$\Rightarrow$" Si $A$ es abierto y $A \cap M = \varnothing$, supongamos que existe $x \in A \cap \overline{M}$; entonces $x \in \overline{M}$ y $x \in A$, luego por la definición de adherencia, como $A$ es abierto, debe cumplirse $A \cap M \neq \varnothing$, en contra de la hipótesis.

"$\Leftarrow$" Tomemos $M = X - A$; entonces $(X - A) \cap A = M \cap A = \varnothing$ y por la hipótesis, se tiene que $\overline{X - A} \cap A = \overline{M} \cap A = \varnothing$; por tanto, si $x \in A$, $x \notin \overline{X - A}$, luego existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap (X - A) = \varnothing$, es decir $B(x, r) \subset A$, de donde concluimos que $A$ es entorno de $x$; y como esto es para cada $x \in A$, $A$ debe ser abierto.

**P.2.20** Considere $\mathbb{R}$ con la distancia usual.

(a) Demuestre que la sucesión de números reales $(1/n)_n$, con la distancia usual, converge a cero.

(b) Demuestre que si $(x_n)_n$ es una sucesión de números reales no negativos tal que $x_n \leq 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_n x_n = 0$.

**P.2.21** Toda sucesión convergente en un espacio métrico es un conjunto acotado.

**Indicación**: Observe que si la sucesión converge, todos los términos excepto, quizás, una cantidad finita, están contenidos en una bola centrada en el límite.

**P.2.22** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $A \subset X$. Un punto $x \in X$ es $x \in \operatorname{Fr} A$ si, y sólo si, existen sucesiones $(x_n)_{n=1}^\infty$ en $A$ e $(y_n)_{n=1}^\infty$ en $X - A$ tales que $x_n \to x$ e $y_n \to x$.

**Indicación**: Tenga en cuenta las Proposiciones 2.5.3(a) y 2.6.6.

**P.2.23** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $A \subset X$. Un punto $x \in X$ es $x \in A'$ si, y sólo si, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^\infty \subset A$ de términos distintos dos a dos convergente a $x$.

**Indicación**: En el caso directo, intente construir una sucesión que converja a $x$, para lo que puede repasar las Proposiciones 2.6.6 y 2.6.7, asegurándose de que los términos pueden ser distintos. Para la demostración en sentido contrario observe la Proposición 2.3.5.

**Resolución**: "$\Rightarrow$" Sea $x \in A'$; entonces para todo $r > 0$, se tiene que $(B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$; en particular si tomamos $r = 1$, existe un punto $x_1 \in (B(x,1) - \{x\}) \cap A$; si ahora el radio que tomamos es $r = 1/2$, existe $x_2 \in (B(x,1/2) - \{x\}) \cap A$ con $x_1 \neq x_2$, pues si no hubiera ningún punto distinto de $x_1$, como $x_1 \neq x$, será $d(x,x_1) = \delta > 0$ y la bola $B(x,\delta)$ sólo tendría en común con $A$ el propio $x$, con lo que $x \notin A'$. De forma similar y tomado radios $1/n$, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ de términos distintos dos a dos, que converge a $x$ puesto que la sucesión de las distancias cumple $d(x,x_n) < 1/n$, lo que significa que converge a cero.

"$\Leftarrow$" Si existe una sucesión de términos distintos dos a dos que converge a $x$, entonces $x \in \overline{A}$, pero $x$ no puede ser un punto aislado, ya que toda bola $B(x,\varepsilon)$ contiene puntos de la sucesión (distintos dos a dos) distintos de $x$, por tanto, en virtud de la Proposición 2.3.5, $x \in A'$.

**P.2.24** Demuestre que dos distancias $d$ y $d'$ sobre un conjunto $X$ son equivalentes si, y sólo si, se verifica la propiedad siguiente:

*Una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} x \subset X$ converge a $x \in X$ en $(X,d)$ si, y sólo si converge a $x$ en $(X,d')$.*

**Indicación**: En el caso directo utilice la Proposición 1.4.2 y para el inverso puede usar el Corolario 2.6.8(b).

**Resolución**: "$\Rightarrow$" Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $x$ en $(X,d)$ y veamos que también lo hace en $(X,d')$. Dado $\varepsilon > 0$, la bola $B_{d'}(x,\varepsilon)$ contiene una bola $B_d(x,r)$, ya que suponemos que las distancias son equivalentes; entonces para este $r > 0$, como la sucesión converge para la distancia $d$, existe $n_0$ tal que $n > n_0$ implica que $x_n \in B_d(x,r)$ y como esta bola está contenida en $B_{d'}(x,\varepsilon)$ también ocurre que $x_n \in B_{d'}(x,\varepsilon)$, si $n > n_0$, es decir $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $x$ en $(X,d')$.

"$\Leftarrow$" Para ver que ambas distancias son equivalentes tenemos que ver que las topologías generadas por cada una de ellas tienen los mismos abiertos. Para esto podemos aplicar el Corolario 2.6.8(b). En efecto, sea $A \subset X$, abierto en $\mathcal{T}_d$, y veamos que también lo es en $\mathcal{T}_{d'}$. Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que converge para $d'$ a un punto $x \in A$, como por hipótesis, también converge para $d$ y $A \in \mathcal{T}_d$, en virtud del corolario, existe $n_0$ tal que $n > n_0$ implica que $x_n \in A$, lo que implica que $A$ es abierto en $\mathcal{T}_{d'}$.

**P.2.25** Considere en $\mathbb{R}^2$, con la distancia usual el conjunto

$$M = \{(1/n, y) \in \mathbb{R}^2 : n = 1,2,\ldots; y \in [0,1]\}.$$

Calcule el interior y la adherencia de $M$ (con la adecuada justificación).

**P.2.26** Sea $C \subset \mathbb{R}$ cerrado y acotado con la topología usual. Entonces $C$ está contenido en un intervalo $[a, b]$ de manera que $a, b \in C$.

**Indicación**: Puede usar que todo conjunto de $\mathbb{R}$ acotado tiene ínfimo y supremo y después pruebe que, si tal conjunto es cerrado, debe contener al ínfimo y al supremo.

**Resolución**: Si $C$ es acotado, existen $a = \inf C$ y $b = \sup C$. veamos que, como $C$ es cerrado, entonces $b \in C$; en efecto, si $b \notin C$, al ser cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que la bola $B(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, no tiene ningún punto en común con $C$, en contra de que $b$ es el supremo. Análogamente para el ínfimo.

**P.2.27** Considere el siguiente subconjunto de la recta real

$$A = [0, 1) \cup (1, 3) \cup \{5\},$$

con la topología $\mathcal{T}_A$ inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

(a) Estudie si $\{5\}$ es abierto o cerrado en $A$.
(b) Estudie si $(1, 3)$ es abierto o cerrado en $A$.
(c) Calcule la adherencia de $[0, 1)$ en $A$.
(d) Estudie si $[0, 1/2]$ es un entorno de $0$ en $A$.

**P.2.28** Sean $A$ y $B$ dos subconjuntos cerrados disjuntos en un espacio métrico $(X, d)$. Entonces existen dos abiertos disjuntos $G$ y $H$ tales que $A \subset G$ y $B \subset H$.

**Indicación**: Puede utilizar la Proposición 2.2.7, el Problema **P.2.7**.

**Resolución**: Si uno de los dos conjuntos es vacío no hay nada que probar. Supongamos entonces que $A$ y $B$ son no vacíos. Sea $a \in A$, como $a \notin B$, según el Problema **P.2.7**, $d(a, B) = r_a > 0$; del mismo modo, si $b \in B$, $d(b, A) = r_b > 0$. consideremos los conjuntos

$$G = \cup_{a \in A} B(a, r_a/2)\} \text{ y } H = \cup_{b \in B} B(b, r_b/2)\}.$$

Estos conjuntos son abiertos y cumple $A \subset G$ y $B \subset H$. Además son disjuntos pues si $y \in G \cap H$, entonces $y \in B(a_y, r_{a_y}/2)$ e $y \in B(b_y, r_{b_y}/2)$. Por otra parte $d(a_y, B) = r_{a_y} \leq d(a_y, b_y)$ y $d(b_y, A) = r_{b_y} \leq d(a_y, b_y)$. Pero por la desigualdad triangular tendríamos

$$d(a_y, b_y) \leq d(a_y, y) + d(y, b_y) < \frac{r_{a_y}}{2} + \frac{r_{b_y}}{2} \leq \frac{d(a_y, b_y)}{2} + \frac{d(a_y, b_y)}{2} = d(a_y, b_y)$$

lo cual es imposible.

**P.2.29** Sean $(X, d)$ un espacio métrico y $A$ un subconjunto de $X$. Se dice que $A$ es **fronterizo** cuando $A \subset \operatorname{Fr}(A)$ y que $A$ es **raro** cuando $\overset{\circ}{\overline{A}} = \varnothing$.

(a) ¿Es cierto que $A$ es fronterizo si, y sólo si, $\overset{\circ}{A} = \varnothing$?

(b) ¿Es cierto que $A$ es fronterizo si, y sólo si, el complementario de $A$ es denso en $X$?

(c) Encuentre en $(\mathbb{R}, d_u)$ dos ejemplos de conjuntos fronterizos.

(d) Encuentre en $(\mathbb{R}, d_u)$ dos ejemplos de conjuntos raros.

(e) ¿Todo conjunto raro es fronterizo?

(f) ¿Todo conjunto fronterizo es raro?

(g) ¿$A$ abierto implica que $\mathrm{Fr}(A)$ es raro?

(h) ¿Todo conjunto cerrado y raro es la frontera de un conjunto abierto?

**Indicación**: (a) si. (b) si. (e) si. (g) si. (h) si.

**P.2.30** Sea $(X, d)$ un espacio métrico:

(1) Demuestre que $D \subset X$ es denso en $X$ si, y sólo si, $X - D$ tiene interior vacío.

(2) Demuestre que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ con la topología usual es denso en $\mathbb{R}$ si, y sólo si, todo punto de $\mathbb{R}$ es límite de una sucesión de puntos de $A$.

(3) Sea la sucesión $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}$. Pruebe que $\mathbb{R} - \{(1/n)_{n=1}^{\infty}\}$ es denso en $\mathbb{R}$ y que la sucesión no es densa en $\mathbb{R}$.

**P.2.31** Sean $(X, d)$ e $(Y, d')$ dos espacios métricos y considere el espacio $X \times y$ dotado de la distancia $d((x, y), (x', y')) = \text{máx}\{d(x, x'), d'(y, y')\}$. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son dos sucesiones en $X$ e $Y$ respectivamente, demuestre que la condición necesaria y suficiente para que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converja a $x \in X$ y la sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converja a $y \in Y$ es que la sucesión $(z_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $X \times Y$, converja a $z = (x, y) \in X \times Y$.

**P.2.32** Considere los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y calcule su interior, exterior, frontera y adherencia primero considerando la distancia discreta y después la distancia usual.

$$(0,1), \quad [0,1], \quad \left\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}, \quad \mathbb{Q}$$