Capítulo 3

Ejercicios y Problemas

P.3.1 Si A es un subespacio de un espacio métrico (X,d), demuestre que la función *inclusión* $j:(A,d_A)\longrightarrow(X,d)$ $(j(x)=x)$ es continua.

Indicación: Utilice la definición de abiertos en subespacios.

Resolución: Si B es abierto en X, entonces, $j^{-1}(B)=A\cap B$ que es abierto en A.

P.3.2 Sea $f:(X,d)\longrightarrow(Y,d')$ una aplicación.

(a) Demuestre que f es continua en un punto $a\in X$ si, y sólo si, para todo entorno U de $f(a)$ se cumple que $a\in[f^{-1}(U)]^\circ$

(b) Demuestre que f es continua en X si, y sólo si, para todo conjunto $B\subset Y$ se cumple

$$f^{-1}(\overset{\circ}{B})\subset[f^{-1}(B)]^\circ.$$

Indicación: (a) En la implicación directa puede utilizar que si U es entorno de $f(a)$, U contiene una bola centrada en $f(a)$ y a partir de aquí "jugar" con la continuidad. En el recíproco puede tomar U una bola.

Resolución: (a) Supongamos que f es continua en $a\in X$ y, sea U un entorno de $f(a)$ en Y, hay una bola $B_Y(f(a),\varepsilon)\subset U$; como f es continua en a, existe $\delta>0$ tal que $f(B_X(a,\delta))\subset B_Y(f(a),\varepsilon)$, y por tanto $B_X(a,\delta)\subset f^{-1}(B_Y(f(a),\varepsilon)\subset f^{-1}(U)$, luego $a\in[f^{-1}(U)]^\circ$. Recíprocamente, si tomamos $U=B_Y(f(a),\varepsilon)$, como $a\in[f^{-1}(U)]^\circ$, existe $\delta>0$ tal que $f(B_X(a,\delta))\subset U$.

(b) Si f es continua, $f^{-1}(\overset{\circ}{B})$ es abierto en X y además está incluido en $[f^{-1}(B)]^\circ$ ya que este conjunto es el mayor abierto que contiene a $f^{-1}(B)$. Recíprocamente, si B es abierto en Y, entonces $B=\overset{\circ}{B}$, luego se tiene $f^{-1}(\overset{\circ}{B})=f^{-1}(B)\subset[f^{-1}(B)]^\circ$, de donde se deduce que $f^{-1}(B)$ es abierto.

P.3.3 Sea (X,d) un espacio métrico y $x_0\in X$ un punto. Demuestre que la aplicación $f:(X,d)\longrightarrow(\mathbb{R},|\ |)$ definida como $f(x)=d(x,x_0)$, es continua.

Indicación: Puede utilizar la Proposición 1.1.4.

P.3.4 Sea (X,d) un espacio métrico y $A\subset X$ un subconjunto no vacío determinado. Demuestre que $g:(X,d)\longrightarrow(\mathbb{R},|\ |)$ definida como $g(x)=d(x,A)$, es continua.

Indicación: Puede utilizar la Proposición 1.2.3(b).

$\boxed{\textbf{P.3.5}}$ Sea (X,d) un espacio métrico y $f_1,\dots,f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$, una colección de n funciones continuas (considerando $\mathbb{R}$ con la distancia usual). Entonces la función $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n$ también con la distancia usual) definida como $f(x) = (f_1(x),\dots,f_n(x))$ es continua.

$\boxed{\textbf{P.3.6}}$ Sea la aplicación $f : (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$ definida por

$$f(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

¿Es abierta? ¿Es cerrada? Justifíquelo.

$\boxed{\textbf{P.3.7}}$ Estudie la continuidad de la función "valor absoluto" $|\ | : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (distancia usual). ¿Es homeomorfismo?

$\boxed{\textbf{P.3.8}}$ Encuentre un homeomorfismo entre el intervalo (a,b) de $\mathbb{R}$ y el propio $\mathbb{R}$, con las topologías usuales. Idem para los intervalos $[a,b]$ y $[0,1]$

Indicación: Puede intentar definir una aplicación que sea homeomorfismo entre $(0,1)$ y (a,b) y después componer con la aplicación del Ejemplo **Ej.3.15.**.

Resolución: Es fácil ver que la aplicación $f : (0,1) \longrightarrow (a,b)$ definida como $f(t) = (1-t)a + tb$ es un homeomorfismo (también es válida en el caso de que los intervalos sean cerrados). Cómo la composición de homeomorfismos es homeomorfismo, basta componer la aplicación que acabamos de definir tomando $(a,b) = (-1,1)$, con la aplicación definida en el Ejemplo **Ej.3.15.**.

$\boxed{\textbf{P.3.9}}$ Sea $(a,b) \in X \times Y$. Demuestre que la "rebanada horizontal" $X \times b$ es homeomorfa a X, y que la "rebanada vertical" $a \times Y$ es homeomorfa a Y con la topología usual definida para el producto de espacios (vea el Ejemplo **Ej.1.9.**).

$\boxed{\textbf{P.3.10}}$ Sean (X,d) e (Y,d') dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Demuestre:

(a) f es cerrada si, y sólo si, $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$ para todo $A \subset X$.

(b) f es abierta si, y sólo si, $f(\overset{\circ}{A}) \subset [f(A)]^\circ$ para todo $A \subset X$.

Indicación: (a) En la implicación directa puede utilizar que, si f es cerrada, $f(\overline{A})$ es cerrado. Para el recíproco, tenga en cuenta que si un conjunto es cerrado, coincide con su adherencia.

Resolución: (a) Si f es cerrada, entonces $f(\overline{A})$ es cerrado y como $A \subset \overline{A}$, se cumple $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. Recíprocamente, si A es cerrado, $A = \overline{A}$, luego

$f(A) = f(\overline{A})$, pero $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A}) = f(A)$, de donde concluimos que $f(A)$ es cerrado por contener a su adherencia.

P.3.11 Pruebe que las siguientes son propiedades topológicas: *(i)* punto de acumulación; *(ii)* interior; *(iii)* frontera; *(iv)* desidad y *(v)* entorno.

Resolución: Suponga que tiene un homeomorfismo y utilice las definiciones en cada caso, combinándolas con la definición de aplicación continua y el hecho de que dispone de tal homeomorfismo.

Resolución: (i) Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homeomorfismo entre dos espacios métricos y $M \subset X$, veamos que si $x \in M'$, entonces $f(x) \in [f(M)]'$. En efecto, f es continua, luego dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B_X(x, \delta)$, entonces $f(x) \in B_Y(f(x), \varepsilon)$. Por otra parte, si $x \in M'$, para cada $\delta > 0$ se tiene que $[B_X(x, \delta) - \{x\}] \cap M \neq \varnothing$, luego existe $y \in [B_X(x, \delta) - \{x\}] \cap M$, $x \neq y$; como f es biyectiva, $f(x) \neq f(y)$ y por tanto como se cumple que $f(y) \in [B_y(f(x), \varepsilon) - \{f(x)\}] \cap f(M)$ (para todo $\varepsilon > 0$), entonces $f(x) \in [f(M)]'$.

(ii) Se trata de aplicar el apartado (b) del Problema **P.3.10**.

(iii) , (iv) y (v) se obtienen de forma similar a (i).

P.3.12 Sean (X, d), (Y, d') y (Z, d'') tres espacios métricos y dos funciones continuas $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$. Si $g \circ f : X \longrightarrow Z$ es un homeomorfismo, demuestre:

(a) Si g es inyectiva, entonces f y g son homeomorfismos.
(b) Si f es sobreyectiva, entonces f y g son homeomorfismos.

Resolución: Utilice propiedades elementales de la composición de aplicaciones respecto de la inyectividad o sobreyectividad y vea que f y g son abiertas.

Resolución: (a) $g \circ f$ es homeomorfismo, luego es biyectiva y por tanto g es sobreyectiva que, al ser inyectiva por hipótesis, es biyectiva; y f es inyectiva. Por otra parte podemos poner $f = g^{-1} \circ g \circ f$, es decir como composición de dos aplicaciones biyectivas, g^{-1} y $g \circ f$, luego f es biyectiva. Para ver que f y g son homeomorfismos, sólo resta probar que sus inversas respectivas son continuas o lo que es equivalente, que f y g son abiertas. g lo es puesto que si $B \subset Y$ es abierto, entonces por la continuidad de f, tenemos que $f^{-1}(B)$ es abierto y como $g \circ f$ es homeomorfismo, $g(B) = (g \circ f)f^{-1}(B)$ es abierto. De forma parecida se puede ver que f es abierta. El apartado (b) se puede realizar de forma similar.

P.3.13 Se dice que una aplicación $f : (X, d) \to (Y, d')$ es de ***Lipschitz*** si existe un número real $k > 0$ tal quep, para todo $x, y \in X$,

$$d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Demuestre que una aplicación de Lipschitz es uniformemente continua.

P.3.14 Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ continua y sobreyectiva. Demuestre que si $D \subset X$ es un conjunto denso, entonces $f(D)$ también es denso en Y.

P.3.15 Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ y $a \subset X$. Demuestre que si f es continua en $\overline{A}$ y constante en A, entonces es constante en $\overline{A}$.

Indicación: Puede utilizar las caracterizaciones de la adherencia y la continuidad por sucesiones.

Resolución: Como f es constante en A, será $f(x) = a_0$, para todo $x \in A$. Por otra parte, si $a \in \overline{A}$ existe una sucesión $(a_n)_n \subset A$ cuyo límite es a, de modo que, como f es continua $f(a_n)$ converge a $f(a)$; pero la sucesión de las imágenes es constante $f(a_n) = a_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que implica que $f(a) = a_0$.

P.3.16 Demuestre que la aplicación $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, es continua en $(0, 1]$ con la distancia usual relativa, pero no es uniformemente continua.

P.3.17 Sea (X, d) un espacio métrico y $(\mathbb{R}, d_u)$.

(a) Si $a \in X$, demuestre que la aplicación $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = d(a, x)$ es uniformemente continua.

(b) Si $A \subset X$, demuestre que la aplicación $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = d(A, x)$ es uniformemente continua.

Indicación: Puede utilizar las Proposiciones 1.1.4 y 1.2.3(b) respectivamente.

P.3.18 Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos y $f, g : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Demuestre:

(a) El conjunto $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es cerrado en X.

(b) El conjunto $\{x \in X : f(x) = a\}$, con $a \in Y$ fijo, es cerrado en X.

(c) Si $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ es denso en X, entonces $f = g$.

P.3.19 Sean $(Y_1, \rho_1), \ldots, (Y_n, \rho_n)$ y (X, d) espacios métricos y una aplicación $f : X \longrightarrow Y_1 \times \cdots \times Y_n$. Demuestre que f es continua en $a \in X$ si, y sólo si, $f_i = \pi_i \circ f : X \longrightarrow Y_i$ es continua en $a \in X$ para cada $i = 1, \ldots, n$.

P.3.20 Sea $f : (X, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u)$. Demuestre que f es continua si, y sólo si, para cada $a \in \mathbb{R}$, son abiertos los conjuntos

$$A_a = \{x \in X : f(x) < a\} \quad \text{y} \quad B_a = \{x \in X : f(x) > a\}.$$

P.3.21 Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq 2 \\ x^2 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Si d_u es la distancia usual, d_D es la distancia discreta y $\rho(x,y) = 2|x-y|$, estudie la continuidad de la función en los siguientes casos

$$f : (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u), \quad f : (\mathbb{R}, d_u) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_D),$$

$$f : (\mathbb{R}, d_D) \longrightarrow (\mathbb{R}, \rho), \quad f : (\mathbb{R}, \rho) \longrightarrow (\mathbb{R}, d_u).$$

P.3.22 Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ cerrados (o abiertos) tales que $X = A \cup B$. Sean $f : A \longrightarrow Y$ y $g : B \longrightarrow Y$ continuas. Demuestre que si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces es continua la aplicación $h : X \longrightarrow Y$ definida como

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ g(x) \text{ si } x \in B \end{cases} .$$

Estudie la continuidad de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \leq 0 \\ x/2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases} , \quad g(x) = \begin{cases} x-2 \text{ si } x \leq 0 \\ x+2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases} ,$$

$$h(x) = \begin{cases} x-2 \text{ si } x < 0 \\ x+2 \text{ si } x \geq 0 \end{cases} .$$