Capítulo 4

Ejercicios y Problemas

P.4.1 Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre:

(a) La intersección de cualquier familia de subconjuntos compactos es un subconjunto compacto.

(b) La unión de una familia finita de subconjuntos compactos es un conjunto compacto. ¿Y la unión de una familia arbitraria?

P.4.2 (a) Pruebe que, en $(\mathbb{R}, |\ |)$, no son compactos los intervalos (a, b), $[a, b)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$.

(b) Estos conjuntos le proporcionan contraejemplos del Teorema 4.2.4 (si el espacio no es compacto, un cerrado no es en general, compacto); del Teorema 4.2.5(b) (un conjunto acotado, en general, no es compacto). Identifíquelos con las explicaciones adecuadas.

P.4.3 Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una aplicación biyectiva y continua, con (X, d) compacto. Demuestre que f es un homeomorfismo.

Indicación: Puede probar que la aplicación es cerrada y, a partir de aquí, que la inversa es continua.

Resolución: Veamos, en primer lugar, que f transforma cerrados de X en cerrados de Y. En efecto, como X es compacto, por el Teorema 4.2.4 se tiene que si $C \subset X$ es cerrado, entonces C es compacto; y por el Teorema 4.3.1 $f(C)$ es compacto, que según el Teorema 4.2.5(a) también es cerrado.
Veamos ahora que f es un homeomorfismo. Para esto hay que probar que la aplicación inversa $g = f^{-1}$ es continua; y lo es puesto que si $C \subset X$ es cerrado entonces $g^{-1}(C) = f(C)$ es cerrado, tal y como acabamos de ver.

P.4.4 Demuestre que la compacidad es una propiedad topológica. Es decir, demuestre que si $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ es un homeomorfismo. Entonces X es compacto si, y sólo si, Y es compacto.

P.4.5 Demuestre la Proposición 4.4.3.

Indicación: La implicación directa es inmediata aplicando un resultado anterior. Para el recíproco puede utiliza que si el conjunto es acotado debe tener supremo e ínfimo y si es cerrado estos últimos elementos han de estar en K.

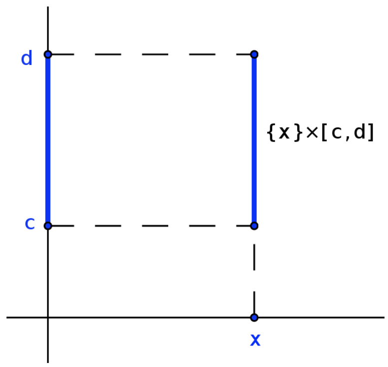

Figura 4.5 – El conjunto $S = \{x\} \times [c, d]$ es compacto.

$\boxed{\textbf{P.4.6}}$ Sea $[c, d] \subset \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $S = \{x\} \times [c, d]$ es compacto en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual (véase la Figura 4.5).

Indicación: Puede ver que S es homeomorfo a $[c, d]$ o bien comprobar directamente que verifica la definición de compacto.

$\boxed{\textbf{P.4.7}}$ Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico (X, d) y un punto $a \in X$, $a \notin K$. De uestre que existen en X dos conjuntos abiertos A y B tales que $a \in A$, $K \subset B$ y $A \cap B = \varnothing$.

Indicación: Puede usar el Problema **P.2.28** o resolverlo utilizando la Propiedad de Hausdorff 1.3.4 aplicada al punto $a \notin K$ y a cada punto de K.

Resolución: Si $a \notin K$, por la Propiedad de Hausdorff 1.3.4, para cada $x \in K$, exisre $r_x > 0$ tal que $B(a, r_x) \cap B(x, r_x) = \varnothing$. Por otra parte, las bolas $\{B(x, r_x)\}_{x \in K}$ así obtenidas, constituyen un recubrimiento abierto de K que admite un subrecubrimiento finito $\{B(x_1, r_{x_1}) \ldots, B(x_n, r_{x_n})\}$. Si tomamos $r_0 = \min\{r_{x_1}, \ldots, r_{x_n}\}$, entonces $B(a, r_0)$ no corta a ninguna de las bolas del recubrimiento finito. Ahota tomando $A = B(a, r_0)$ y $B = \cup_{i=1} B(x_i, r_{x_i})$ ya tenemos el resultado.

$\boxed{\textbf{P.4.8}}$ Sea K un subconjunto compacto de un espacio métrico (X, d). Demuestre que si $a \in X - K$, entonces, existe un abierto A tal que $a \in A \subset K^c$. Utilice este resultado para demostrar que todo compacto en un espacio métrico, es cerrado.

Indicación: Es una aplicación directa del Problema **P.4.7**.

$\boxed{\textbf{P.4.9}}$ Sean K y H dos compactos disjuntos en un espacio métrico (X, d). Demuestre que existen dos abiertos disjuntos $A, B \subset X$ tales que $K \subset A$ y $H \subset B$.

Resolución: Puede aplicar el Problema **P.2.28** o bien el Problema **P.4.7**.

Resolución: Por el Problema **P.4.7**, como $K \cap H = \varnothing$, para cada $a \in K$, existen A_a y B_a abiertos de manera que $A_a \cap B_a = \varnothing$ con $a \in A_a$ y $H \subset B_a$. Entonces la familia de conjuntos abiertos $\{A_a : a \in K\}$ así obtenidos, constituye un recubrimiento abierto de K que admite una subrecubrimiento finito $\{A_{a_1}, \ldots, A_{a_n}\}$; tenemos entonces que

$$K \subset A = \cup_{i=1}^{n} A_{a_i} \quad \text{y} \quad H \subset B = \cap_{i=1} B_{a_i},$$

y B es abierto por ser intersección finita de abiertos. Observemos además que como cada $A_{a_i} \cap B_{a_i} = \varnothing$, también se cumple $A_{a_i} \cap B = \varnothing$, de donde deducimos que $A \cap B = \varnothing$ y el resultado queda probado.

P.4.10 ¿Cuáles de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ son compactos? Justifique la respuesta.

1. $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$
3. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| + |y| \leq 1\}$
4. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 < 1\}$
5. $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 1, \ 0 \leq y \leq 1/x\}$

P.4.11 Sea $(\mathbb{R}, d)$ el espacio métrico de los números reales con la distancia

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Sea $A = [1, +\infty)$. Estudie si A es cerrado, acotado o compacto en dicho espacio.

P.4.12 Demuestre que un triángulo, incluidos sus lados, es compacto en $\mathbb{R}^2$.

Indicación: Puede intentar ver que es cerrado y acotado.

P.4.13 Demuestre que, en un espacio métrico, el conjunto formado por una sucesión convergente junto con su límite, es compacto.

Indicación: Puede utilizar que si una sucesión tiene límite, todos los términos de dicha sucesión excepto, quizás, una cantidad finita de ellos, están contenidos en cualquier abierto que contenga al límite.

Resolución: Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión con límite x y $\{A_i\}_{i \in I}$ es un recubrimiento abierto del conjunto $A = \{(x_n)_{n=1}^{\infty}\} \cup \{x\}$, entonces para un $i_0 \in I$, se tiene que $x \in A_{i_0}$. Como este conjunto es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A_{i_0}$.
Por otra parte, dado que $x_n \longrightarrow x$, existe n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $x_n \in B(x, \varepsilon)$, lo que significa que todos los términos de la sucesión, excepto, quizás, los n_0 primeros, están en A_{i_0} y como $\{A_i\}_{i \in I}$ recubre A, $x_1 \in A_{i_1}, \ldots, x_{n_0} \in A_{i_{n_0}}$ con lo que tenemos un subrecubrimiento finito $A_{i_0}, A_{i_1}, \ldots A_{i_{n_0}}$.

P.4.14 ¿Cuáles de las siguientes familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$ satisfacen la propiedad de intersección finita? Justifique la respuesta en cada caso.

1. $\{(n, n+2)\}_{n\in\mathbb{N}}$
2. $\left\{\left(\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$
3. $\{(-n, n)\}_{n\in\mathbb{N}}$

P.4.15 Demuestre que un espacio métrico (X, d) es compacto si, y sólo si, para toda familia de cerrados $\{C_i\}_{i\in I}$ tales que $\bigcap_{i\in I} C_i = \varnothing$, existe una subfamilia finita $\{C_{i_1}, \ldots, C_{i_k}\}$ que cumple $C_{i_1} \cap \cdots \cap C_{i_k} = \varnothing$.

P.4.16 Demuestre que si (X, d) e (Y, d') son dos espacios métricos e Y es compacto, entonces la proyección $\pi_1 : X \times Y \to X$ es una aplicación cerrada.

P.4.17 Sea (X, d) un espacio métrico con la propiedad de Bolzano-Weierstrass.

(a) Si $f : X \to Y$ es continua, ¿Tiene $f(X)$ la propiedad de Bolzano-Weierstrass?

(b) Si A es un subconjunto cerrado de X, ¿es A compacto por punto límite?

P.4.18 Dado un espacio métrico (X, d), se dice que un subconjunto $M \subset X$ es ***relativamente compacto*** si $\overline{M}$ es compacto. Pruebe:

(a) Todo conjunto compacto es relativamente compacto. Busque un ejemplo en $\mathbb{R}$ con la topología usual que muestre que el recíproco no es cierto en general.

(b) Todo conjunto relativamente compacto y cerrado es compacto.

(c) Todo conjunto relativamente compacto es acotado.

(d) Todo conjunto relativamente compacto es totalmente acotado. ¿Es cierto el recíproco?

(e) Todo subconjunto de un conjunto relativamente compacto es relativamente compacto. Deduzca que todo subconjunto de un conjunto compacto es relativamente compacto.

P.4.19 Sea K un conjunto compacto en un espacio métrico (X, d). Demuestre que para todo subconjunto $B \subset X$, existe un punto $x_0 \in K$ tal que $d(x_0, B) = d(K, B)$.

Indicación: Puede utilizar el Teorema de Weierstrass 4.3.4.

Resolución: Según el Problema **P.3.17**, la aplicación $f(x) = d(x, B)$, con $x \in X$, es uniformemente continua; y el Teorema de Weierstrass 4.3.4 permite afirmar que f alcanza sus extremos en K compacto.

P.4.20 Sea K un conjunto compacto en un espacio métrico (X, d) y $B \subset X$ un cerrado tal que $K \cap B = \varnothing$. Demuestre que $d(K, B) > 0$.

Indicación: Puede utilizar el Problema **P.4.19** anterior.

Resolución: Si suponemos que $d(K, B) = 0$, entonces según el Problema **P.4.19** anterior, existe $x_0 \in K$ tal que $d(x_0, B) = d(K, B) = 0$; pero como B es cerrado, según la Proposición 2.2.7, $x_0 \in B$, en contra de que $K \cap B = \varnothing$.

P.4.21 Sea K y H dos conjuntos compactos en un espacio métrico (X, d). Demuestre que existen $x \in K$ e $y \in H$ tales que $d(x, y) = d(K, H)$.

Indicación: Puede aplicar el Problema **P.4.19** anterior.

P.4.22 Sea K un conjunto compacto en un espacio métrico (X, d). Demuestre el conjunto derivado K' es compacto.

Indicación: Puede intentar ver que K' es secuencialmente compacto.

Resolución: Vamos a ver que secuencialmente compacto; de modo que sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en K', entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in (B(x_n, 1/n) - \{x_n\}) \cap K$. estos puntos constituyen una sucesión en K que verifica $d(x_n, y_n) < 1/n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como K es compacto, también es secuencialmente compacto, lo que implica que hay una subsucesión $(y_{n_k})_k$ convergente a un punto $y \in K$; entonces $(x_{n_k})_k$ es subsucesión de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que verifica

$$d(x_{n_k}, y) \leq d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, y)$$

de donde se deduce que $(x_{n_k})_k$ también converge a y, que evidentemente es un punto de acumulación.

P.4.23 Demuestre que toda sucesión $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ decreciente ($C_{n+1} \subset C_n$) de cerrados no vacíos, contenidos en un subconjunto compacto K de un espacio métrico, tiene intersección no vacía.

P.4.24 Demuestre el Teorema de Bolzano-Weierstrass: *En $\mathbb{R}$, toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente*.

Indicación: Puede ver que la sucesión está contenida en un compacto y, a partir de ahí ver que tiene un punto de acumulación.