# Capítulo 6

## Ejercicios y Problemas

**P.6.1** Sean $A$, $B$ y $C$ tres subconjuntos de un espacio métrico. Demuestre:

(a) Si $A$ y $B$ están separados y $C \subset A$, entonces $C$ y $B$ están separados.

(b) Si $C$ y $A$ están separados y $C$ y $B$ también están separados, entonces $C$ y $A \cap B$ están separados.

(c) Si $A$ y $B$ están separados, entonces $A \cap C$ y $B \cap C$ están separados.

**P.6.2** Demuestre que un espacio discreto con más de un punto, es no conexo.

**P.6.3** Demuestre que si $A$ y $B$ son dos subconjuntos disjuntos de un espacio métrico y ambos son abiertos o ambos son cerrados, entonces están separados.

**Indicación**: Pueda razonar suponiendo que $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$.

**Resolución**: Supongamos que $A \cap B = \varnothing$ y que ambos son abiertos, entonces $\overline{A} \cap B = \varnothing$, pues si $x \in \overline{A} \cap B$, $x \in \overline{A}$ y por tanto, todo abierto que contenga a $x$ debe cortar a $A$, en particular $B \cap A \neq \varnothing$, en contra de la hipótesis. Análogamente se prueba que $A \cap \overline{B} = \varnothing$. El el caso de que sean cerrados es evidente.

**P.6.4** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y $A, B \subset X$ separados. Pruebe:

(a) Si $A \cup B$ es abierto, entonces $A$ y $B$ son abiertos.

(b) Si $A \cup B$ es cerrado, entonces $A$ y $B$ son cerrados.

**Indicación**: En el caso (a) puede probar que $A$ y $B$ son entornos de todos sus puntos; en el caso (b) que todo punto de la adherencia de cada conjunto está en tal conjunto.

**Resolución**: (a) Supongamos $A \cup B$ es abierto, veamos que $A$ es abierto probando que es entorno de todos sus puntos, de modo que sea $x \in A$, entonces $x \in A \cup B$, que es abierto, luego para cierto $r > 0$, $B(x, r) \subset A \cup B$, pero como $A$ y $B$ están separados, $x \notin \overline{B}$ luego para algún $s > 0$, $B(x, s) \cap B = \varnothing$, tomando $t = \min\{r, s\}$ se cumple que $B(x, t) \subset A$, lo que significa que $A$ es abierto. Análogamente para $B$.
(b) Si ahora suponemos que $A \cup B$ es cerrado, para probar que $A$ es cerrado, veamos que coincide con su adherencia. Sea $x \in \overline{A}$, entonces $x \in \overline{A \cup B} = A \cup B$; si $x \notin A$, entonces $x \in B$ y como los conjuntos están separados $x \notin B \cap \overline{A}$, es decir $x \notin \overline{A}$, en contra de lo que estamos suponiendo. Análogamente para $B$.

$\boxed{\textbf{P.6.5}}$ Demuestre que si $A$ es un subconjunto conexo de un espacio métrico que contiene más de un punto, entonces $A$ es infinito.

$\boxed{\textbf{P.6.6}}$ ¿Es conexa la intersección de dos subconjuntos conexos? En caso afirmativo demuéstrelo y en caso negativo encuentre un contraejemplo.

$\boxed{\textbf{P.6.7}}$ Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios conexos de $X$ que verifican $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ para cada $n$. Demuestre que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es conexo.

**Indicación**: Puede construir una nueva familia a la que aplicar el Teorema 6.2.9.

**Resolución**: Si tomamos $B_1 = A_1$, $B_2 = A_1 \cup A_2$, y así sucesivamente $B_n = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, la familia $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple las condiciones del Teorema 6.2.9 y $\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n = A$.

$\boxed{\textbf{P.6.8}}$ Sean $\{A_\alpha\}_{\alpha\in J}$ una colección de subespacios conexos de $X$ y $A$ un subespacio conexo de $X$. Demuestre que si $A \cap A_\alpha \neq \varnothing$ para todo $\alpha$, entonces $A \cup \left(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha\right)$ es conexo.

$\boxed{\textbf{P.6.9}}$ Un espacio métrico $(X, d)$ es conexo si, y sólo si, cualquier aplicación continua entre $X$ y el espacio discreto $\{0, 1\}$ es constante, es decir, o bien $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, o bien $f(x) = 1$ para todo $x \in X$.

$\boxed{\textbf{P.6.10}}$ Si $(X, d)$ es un espacio métrico no conexo, entonces existe una aplicación $f : X \to \{0, 1\}$ continua y no constante.

$\boxed{\textbf{P.6.11}}$ Demuestre que si $(X, d)$ es conexo y $f : (X, d) \to (\mathbb{R}, d_u)$ es una aplicación continua, entonces $f(X)$ es un intervalo o un punto.

$\boxed{\textbf{P.6.12}}$ Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Demuestre que cada subconjunto conexo de $X$ está contenido en una única componente conexa.

$\boxed{\textbf{P.6.13}}$ Cada subconjunto conexo de un espacio métrico que es a la vez abierto y cerrado, es una componente conexa.

$\boxed{\textbf{P.6.14}}$ Cada componente conexa de un espacio métrico es un cerrado.

$\boxed{\textbf{P.6.15}}$ Considere en $(\mathbb{R}, |\ |)$, el conjunto $C = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ con la distancia inducida por la usual. Pruebe que $\{0\}$ es una componente conexa de $C$ y concluya que las componentes conexas no son, necesariamente abiertos.

$\boxed{\textbf{P.6.16}}$ Estudie si son homeomorfos la recta real y la circunferencia, con la distancia usual.

**Indicación**: Puede tomar como modelo el Ejemplo **Ej.6.17.**.

**P.6.17** Sean $A_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, , y = x/n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$; y $B = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq x \leq 1\}$.

(a) Haga una representación gráfica del conjunto $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y estudie si es conexo por caminos y/o conexo.

(b) Idem para el conjunto $A \cup B$.

**Indicación**: Puede "inspirarse" en el Ejemplo **Ej.6.15.**.

**P.6.18** Sea $(X,d)$ un espacio métrico, $M \subset X$ un subconjunto conexo y una aplicación continua $f : M \to \mathbb{R}$.

(a) Pruebe que si $a \in M$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que $f(a) < \alpha$ entonces existe $U \in \mathcal{U}_a$ tal que $f(x) < \alpha$ para todo $x \in M \cap U$.

(b) Supongamos que para todo entorno $U \in \mathcal{U}_a$ existen $x, y \in U \cap M$ tales que $f(x)$ y $f(y)$ son de signos opuestos; demuestre que $f(a) = 0$.

(c) Pruebe que si para $a, b \in M$, $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, existe $c \in M$ tal que $f(c) = 0$.

**Indicación**: (a) Puede utilizar el Problema **P.3.20**.

**Resolución**: (a) Como $f$ es continua, el conjunto $A_\alpha = \{x \in M : f(x) < \alpha\}$ es abierto en $M$ (véase el Problema **P.3.20**), luego es entorno de todos sus puntos, en particular de $a \in A_\alpha$, por tanto, existe una bola abierta en $M$, centrada en $a$ y contenida $A_\alpha$. Como las bolas en el subespacio $M$ son intersección de bolas en $X$ con $M$, basta tomar $U$ idéntico a dicha bola.

**P.6.19** Sea $X$ un espacio métrico y $A \subset X$ un subconjunto. Demuestre que todo subconjunto conexo $P \subset X$ que corte a $A$ y $A^c$, también corta a la frontera de $A$.

**Indicación**: Puede suponer que $P$ no corta a la frontera y utilizar el Problema **P.6.3**, para llegar a que $P$ no sería conexo.

**Resolución**: Supongamos que $P \cap \partial A = \varnothing$; esto quiere decir que para todo punto $x \in P$ existe $r_x > 0$ de modo que la bola $B(x, r_x)$ no corta a $A$ o no corta a $A^c$. Como $P = (P \cap A) \cup (P \cap A^c)$, la afirmación anterior implica que $B(x, r_x)$ está contenida, o bien en $P \cap A$, o bien en $P \cap A^c$, pero no en ambos y que por tanto estos dos conjuntos disjuntos son abiertos y según el Problema **P.6.3**, están separado, en contra de que $P$ es conexo.

**P.6.20** Sea $X$ un espacio métrico, $A, B \subset X$ dos cerrados tales que $A \cap B$ y $A \cup B$ son conexos. Pruebe que, entonces, $A$ y $B$ son conexos. Busque un contraejemplo en $\mathbb{R}$, con la topología usual, mostrando que la exigencia de que $A$ y $B$ sean cerrados es necesaria.

**Indicación**: Puede suponer que $A$ es no conexo y que por tanto es unión de conjuntos separados y que estos son cerrados. Utilice esto combinado con las hipótesis.

**Resolución**: Supongamos que $A$ es no conexo y que por tanto $A = M \cup N$ donde $M, N$ están separados, como $A$ es cerrado, $M$ y $N$ también lo son; entonces $A \cup B$ ha de estar contenido, o bien en $M$, o bien en $N$, pues en caso contrario $M \cap (A \cap B)$ y $N \cap (A \cap B)$ sería una separación, por cerrados, de $A \cap B$ qu es conexo. Supongamos que $A \cap B \subset M$. Entonces $B \cup M$, y $N$ es una separación de $A \cup B$ por cerrados con lo que este último conjunto no sería conexo. Los ejemplos pueden ser $A = (0, 1) \cup (2, 4)$ y $B = [1, 2] \cup (3, 4)$.

**P.6.21** Sean $A$ un subconjunto propio de $X$ y $B$ un subconjunto propio de $Y$. Si $X$ e $Y$ son conexos, demuestre que $(X \times Y) - (A \times B)$ es conexo.

**Indicación**: Puede comprobar que

$$(X \times Y) - (A \times B) = [X \times (Y - B)] \cup [(X - A) \times Y]$$

y demostrar que los dos conjuntos de esta unión son conexos no separados de forma similar a la demostración del Teorema 6.4.4.

**Resolución**: Observemos que

$$(X \times Y) - (A \times B) = [(X - A) \times (Y - B)] \cup [(X - A) \times B] \cup [A \times (Y - B)] =$$
$$[X \times (Y - B)] \cup [(X - A) \times Y].$$

Veamos que los dos conjuntos que forman parte de esta última unión son conexos no separados. Como $X$ es conexo, hemos visto en la demostración del Teorema 6.4.4, que $X \times \{y\}$ es conexo; y lo mismo ocurre con $\{x\} \times Y$. En particular también lo es si $y \in Y - B$ o $x \in X - A$. Entonces, fijado $x_0 \in X - A$, cada conjunto $(X \times \{y\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$, para cada $y \in Y - B$ es conexo pues es unión de conexos que tienen en común el punto $(x_0, y)$. Entonces

$$X \times (Y - B) = \bigcup_{y \in Y - B} [(X \times \{y\}) \cup (\{x_0\} \times Y)]$$

es conexo. Lo mismo ocurre, para un $y_0 \in Y - B$ con

$$(X - A) \times Y = \bigcup_{x \in X - A} [(X \times \{y_0\}) \cup (\{x\} \times Y)].$$

El punto $(x_0, y_0)$ es común a estos conjuntos. Por tanto $(X \times Y) - (A \times B)$ es unión de conexos con el punto $(x_0, y_0)$ en común y, en consecuencia es conexo.

**P.6.22** Un espacio métrico $(X, d)$ es ***totalmente disconexo*** si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen dos subconjuntos $G, H \subset X$ separados, tales que $x \in G$ e $y \in H$.

(a) Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales con la distancia inducida por la usual de $\mathbb{R}$, es totalmente disconexo.

(b) Demuestre que las componentes conexas de un espacio totalmente disconexo son los conjuntos unipuntuales.

**P.6.23** (Teorema del punto fijo). Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una aplicación continua. Demuestre que existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

**Resolución**: Observe que el significado de que exista un punto fijo, es equivalente a que $f(x)$ corte a la recta $y = x$. Si suponemos que no hay puntos fijos, se tiene que $f(0) > 0$ y $f(1) < 1$. Definimos la aplicación $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ como $F(x) = (x, f(x))$. $F$ es continua (véase el Problema **P.3.19**), por tanto, $F([0,1])$ es conexo.
Por otra parte consideremos los conjuntos $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x < y\}$ (puntos que están por encima de la diagonal) y $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > y\}$ (puntos que están por debajo de la diagonal), que son abiertos (véase el Problema **P.3.20**) y por lo tanto están separados. Observemos que $(0, f(0)) \in G$ y $(1, f(1)) \in H$ y entonces $G \cap F([0,1])$ y $H \cap F([0,1])$ constituyen una separación de $F([0,1])$, con lo que este último conjunto no sería conexo, lo cual es una contradicción.

**P.6.24** (Teorema de Bolzano) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, de manera que $f(a) \cdot f(b) < 0$. demuestre que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.

**P.6.25** Si $(X,d)$ es un espacio métrico, demuestre que $X$ es conexo si, y sólo si, para todo $A \subsetneq X$ no vacío, se cumple que $\mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$.

**Indicación**: En el caso directo puede suponer que $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$ y utilizar la Proposición 2.5.5 para llegar a una contradicción. Para el recíproco, puede suponer que $X$ es no conexo, con lo cual existe una separación de $X$ formada por cerrados y utilizar la Proposición 2.5.3.

**P.6.26** Sea $(\mathbb{R}^2, d_u)$ y consideremos el conjunto

$$A = ((0,1) \times (0,1)) \cup \{(0,q) : q \in \mathbb{Q}, 0 \leq q \leq 1\}.$$

¿Es $A$ conexo? Justifique la respuesta.