Taller nº 1

$\boxed{1}$ La aplicación $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{si} \quad \mathrm{sg}(x) = \mathrm{sg}(y) \\ |x+y|+1 & \text{si} \quad \mathrm{sg}(x) \neq \mathrm{sg}(y) \end{cases}$$

siendo $\mathrm{sg}(x)$ el signo de $x \in \mathbb{R}$ y suponiendo que $\mathrm{sg}(0)$ es positivo.

a) Demuestre que verifica la desigualdad triangular.

b) Caracterice analítica y geométricamente las bolas abiertas.

$\boxed{2}$ Considere en $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual, los conjuntos

$$A_n = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1/n^2\} \quad \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{N}$$

a) Realice una representación gráfica aproximada de los A_n.

b) Demuestre cada uno de los A_n es cerrado.

c) Considere el conjunto $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. ¿Es cerrado A_n?

d) Calcule la distancia $d(0, A)$.

$\boxed{3}$ Considere el conjunto $A = \{-1\} \cup (0, 2]$ y el espacio (A, d_A) donde d_A es la distancia inducida sobre A por la usual de $\mathbb{R}$.

a) ¿Es abierto en A el conjunto $(1, 2]$?

b) ¿Es abierto el conjunto $\{-1\}$? ¿Es cerrado?

c) Encuentre la bola $B(1/2, 2)$ en (A, d_a).

$\boxed{4}$ Demuestre que las distancia d_1 y d_2 son equivalentes sobre $\mathbb{R}^2$.