Taller nº 1

$\boxed{1}$ La aplicación $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{si} \quad \text{sg}(x) = \text{sg}(y) \\ |x+y|+1 & \text{si} \quad \text{sg}(x) \neq \text{sg}(y) \end{cases}$$

siendo $\text{sg}(x)$ el signo de $x \in \mathbb{R}$ y suponiendo que $\text{sg}(0)$ es positivo.

a) Demuestre que verifica la desigualdad triangular.

b) Caracterice analítica y geométricamente las bolas abiertas.

a) **Solución:** Supongamos en primer lugar que $\text{sg}(x) = \text{sg}(y)$ entonces, si $\text{sg}(z) = \text{sg}(x) = \text{sg}(y)$, aplicando la desigualdad triangular del valor absoluto tenemos

$$d(x,y) = |x-y| = |x+z-z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y).$$

Si, por el contrario, $\text{sg}(z) \neq \text{sg}(x) = \text{sg}(y)$, entonces podemos poner

$$d(x,y) = |x-y| = |x+z-z-y| \leq |x+z|+|z+y| \leq |x+z|+1+|z+y1+1 = d(x,z)+d(z,x)$$

Supongamos ahora que $\text{sg}(x) \neq \text{sg}(y)$ entonces $\text{sg}(z)$ ha de ser igual a uno de los dos puntos anteriores, supongamos que $\text{sg}(z) = \text{sg}(x)$ (por tanto $\text{sg}(y) \neq \text{sg}(z)$). Entonces:

$$d(x,y) = |x+y|+1 = |x-z+z+y|+1 \leq |x-z|+|z+y|+1 = d(x,z)+d(z,y)$$

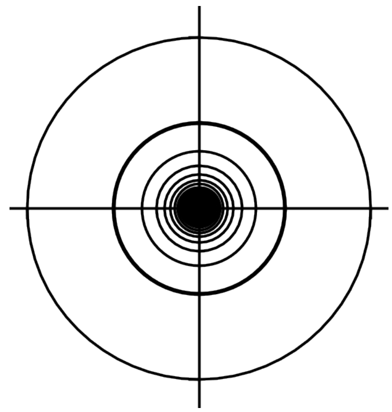
b) **Solución:** Tenemos que encontrar los conjuntos $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x,a) < r\}$ para cada $a \in \mathbb{R}$ y cada $r > 0$. Tenemos los siguientes casos:
Si $\text{sg}(x) = \text{sg}(a)$, entonces se trata de buscar los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $d(x,a) = |x-a| < r$, este conjunto es en general, el intervalo $(a-r, a+r)$, pero como los elementos han de tener el mismo signo, si a es positivo y $a-r \geq 0$, el conjunto buscado será $(a-r, a+r)$, pero si $a-r < 0$ entonces es $[0, a+r)$. Por el contrario si a es negativo y $a+r < 0$ será $(a-r, a+r)$ y si $a+r \geq 0$, $(a-r, 0]$.
Por otra parte, si $\text{sg}(a) \neq \text{sg}(x)$ tenemos que buscar los puntos que cumplen $d(x,a) = |x+a|+1 < r$; pero esta desigualdad no tiene sentido si $r \leq 1$, de modo que, en este caso la bola es la proporcionada en el caso anterior, dependiendo del signo de a.
Supongamos entonces que $r > 1$; entonces buscamos puntos tales que $|x+a|+1 < r$, es decir, $|x+a| < r-1$; y este conjunto es, en general $(-r+1-a, r-1-a)$. Como ha de ocurrir que $\text{sg}(x) \neq \text{sg}(a)$, tenemos:

- Si a es positivo, sólo "nos sirven" los puntos de $(-r+1-a, r-1-a)$ que sean negativos; observemos que, en este caso ($r > 1$), $-r+1-a$ es negativo y $r-1-a$ es positivo si $r-1 \geq a$, luego si esto ocurre el conjunto buscado es $(-r+1-a, 0)$ y la bola se obtiene uniendo este conjunto con el proporcionado en el caso anterior, que al ser $a-r \leq -1 < 0$, es $B(a,r) = (-r+1-a, 0) \cup [0, a+r)$ si $a-r < 0$. Si, por contra, $r-1 < a$ entonces el conjunto buscado es $(-r+1-a, r-1-a)$ y la bola es $B(a,r) = (-r+1-a, r-1-a) \cup (a-r, a+r)$, si $a-r \geq 0$ y $B(a,r) = (-r+1-a, r-1-a) \cup [0, a+r)$ si $a-r < 0$.
- De forma análoga se razona el caso en que a es negativo.

$\boxed{2}$ Considere en $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual, los conjuntos

$$A_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1/n^2\} \quad \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{N}$$

a) Realice una representación gráfica aproximada de los A_n.
Solución: Como se puede apreciar se trata de circunferencias concéntricas en $(0, 0)$ y radio $1/n$; así: $A_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$, $A_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1/4\}$, ...



b) Demuestre cada uno de los A_n es cerrado.
Solución: Veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R} - A_n$ es abierto. Si $(a, b) \in \mathbb{R} - A_n$, $d((a, b), (0, 0)) = r \neq 1/n$, si $r < 1/n$ basta tomar la bola $B((a, b), s)$, con $s < 1/n - r$, entonces si $(x, y) \in B((a, b), s)$, se tiene $d((x, y), (0, 0)) \leq d((x, y), (a, b)) + d((a, b), (0, 0))$, es decir $d((x, y), (a, b)) \geq s + r < 1/n - r + r = 1/n$, con lo que $(x, y) \notin A_n$; de forma análoga si $r > 1/n$. Esto implica que el complementario de A_n es abierto y por tanto A_n es cerrado.

c) Considere el conjunto $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. ¿Es cerrado A_n?
Solución: No es cerrado ya que $(0, 0) \in \overline{A}$. En efecto si tomamos una bola centrada en $(0, 0)$ y radio $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$ y por tanto $A_n \subset B((0, 0), \varepsilon)$.

d) Calcule la distancia $d(0, A)$.
Solución: La distancia es cero, basta aplicar el apartado anterior.

$\boxed{3}$ Considere el conjunto $A = \{-1\} \cup (0, 2]$ y el espacio (A, d_A) donde d_A es la distancia inducida sobre A por la usual de $\mathbb{R}$.

a) ¿Es abierto en A el conjunto $(1, 2]$?
Solución: Si puesto que se puede expresar como intersección de un abierto de $\mathbb{R}$ con A: $(1, 3) \cap A$.

b) ¿Es abierto el conjunto $\{-1\}$? ¿Es cerrado?
Solución: Es abierto pues $\{-1\} = (-2, -1/2) \cap A$ y es cerrado ya que $\{-1\} = [-2, -1/2] \cap A$.

c) Encuentre la bola en A, $B(1/2, 2)$.
Solución: $B_A(1/2, 2) = B_{\mathbb{R}}(1/2, 2) \cap A = (-3/2, 5/2) \cap A$.

$\boxed{4}$ Demuestre que las distancia d_1 y d_2 son equivalentes sobre $\mathbb{R}^2$.

Solución: Observemos que por la desigualdad de Minkowski

$$\sqrt{|x - a|^2 + |x - b|^2} \leq |x - a| + |y - b|$$

y que

$$|x - a| + |y - b| \leq 2\sqrt{|x - a|^2 + |x - b|^2}$$

ahora sólo hay que aplicar el Teorema 1.4.3.