Taller nº 2

$\boxed{1}$ Sea F un subconjunto cerrado en un espacio métrico (X, d) y $a \notin F$ un punto. Demuestre que existen dos abiertos disjuntos A y B tales que $F \subset B$ y $a \in A$. Muestre con un ejemplo que si F no es cerrado la afirmación anterior puede no ser cierta.

Solución: Si $F = \varnothing$ no hay nada que probar. Sea pues F no vacío y cerrado y $a \notin F$. Entonces, al ser F cerrado tenemos que $d(a, F) = r > 0$ y además, lo que significa que $d(a, x) > r$ para cada $x \in F$ consideremos los conjuntos abiertos $A = B(a, r/3)$ y $B = \cup_{x \in F} B(x, r/3)$; observemos que $F \subset B$ y veamos que $A \cap B = \varnothing$. En primer lugar si $z \in B$, entonces $z \in B(x, r/3)$ para algún $x \in F$ y como $d(a, x) \leq d(a, z) + d(z, x)$ tenemos que

$$d(a, z) \geq d(a, x) - d(z, x) > r - \frac{r}{3} = 2\frac{r}{3}$$

por tanto $z \notin A$.
Si F no es cerrado, por ejemplo $F = (1, 2)$ y $a = 1$, entonces $1 \in \overline{(1, 2)} = [1, 2]$ y no se cumple la propiedad anterior.

$\boxed{2}$ En $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual, sean los conjuntos $A_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1/n^2\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

a) Encuentre, con las justificaciones adecuadas $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$ y $\operatorname{Fr} A$.
Solución: $A \subset \overline{A}$. $0 \in \overline{A}$ pues para todo $r > 0$, $B(0, r) \cap A \neq \varnothing$ pues existe n_r con $1/n_r < r$ y por tanto $B(0, 1/n_r) \subset B(0, r)$. Por último, no hay más puntos adherentes pues si $(x, y) \notin A_n$, entonces $d((x, y), (0, 0))0r > 0$ con $r \neq 1/n$; entonces existe n_r tal que $r > 1/n_r$, luego (x, y) está en el exterior de la bola $B((0, 0), 1/n_r)$ lo que significa que está en el interior del complementario.
El interior de A, es vacío pues si $(x, y) \in A_n$ y tomamos una bola $B(x, y), r)$, el punto $(x, y+\varepsilon)$ no está en A_{n-1} tomando $\varepsilon > 0$ tal que $x^2 + (y + \varepsilon)^2 \neq 1/(n-1)^2$.
Por último, como $\overset{\circ}{A} = \varnothing$, $\operatorname{Fr} A = \overline{A}$.

b) Considere el conjunto $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, x > 0\}$. Demuestre que $A \cap F$ es una sucesión que converge a $(0, 0)$.
Solución: Si $x = y$ con $x > 0$, entonces los puntos son, para cada n, $2x^2 = 1/n^2$, es decir

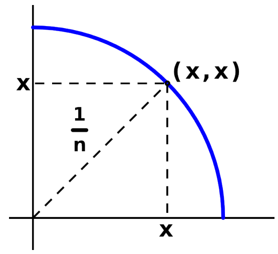
$$A \cap F = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ vea la Figura.}$$

Es evidente que esta sucesión converge a cero puesto que cada coordenada converge a cero.

$\boxed{3}$ Demuestre que, si M es un subconjunto de un espacio métrico (X, d), entonces

$$\operatorname{Fr} M = (M \cap \overline{X - M}) \cup (\overline{M} - M).$$

Solución: $\boxed{\subset}$ Si $x \in \operatorname{Fr} M$, tenemos dos posibilidades:



a) $x \in M$. Como x es un punto frontera, se tiene $B(x,r) \cap (X-M) \neq \varnothing$, para cada $r > 0$, de donde se deduce que $x \in M \cap \overline{X-M}$.

b) $x \notin M$. Como $x \in \operatorname{Fr} M$, entonces $x \in \overline{M}$, luego $x \in \overline{M} - M$.

$\boxed{\supset}$ Si ahora $x \in M \cap \overline{X-M}$, entonces $B(x,r) \cap (X-M) \neq \varnothing$, para todo $r > 0$ y $x \in B(x,r) \cap M$, luego $x \in \operatorname{Fr} M$.
Si lo que ocurre es que $x \in \overline{M} - M$, entonces $B(x,r) \cap M \neq \varnothing$ para todo $r > 0$ y, como $x \notin M$, también es $B(x,r) \cap (X-M) \neq \varnothing$, por tanto $x \in \operatorname{Fr} M$.