Tarea nº 2

Justifique adecuadamente cada respuesta.

Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ dos subconjuntos. Demuestre:

1. $(\overline{A})' = A'$.

   Resolución: Como $A \subset \overline{A}$, aplicando el Problema P.2.18, obtenemos la inclusión $A' \subset (\overline{A})'$. Veamos la inclusión en sentido contrario; sea $x \in (\overline{A})'$, entonces, para todo $r > 0$, $(B(x,r) - \{x\}) \cap \overline{A} \neq \varnothing$, de modo que existe $y \in (B(x,r) - \{x\}) \cap \overline{A}$, y por tanto, $y \in \overline{A}$, lo que implica que para cada $\varepsilon > 0$, se cumple $B(y,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Como $y \in B(x,r)$, podemos tomar $\varepsilon > 0$ de manera que $B(y,\varepsilon) \subset B(x,r)$ y como esto es para todo $r > 0$, tenemos que $(B(x,r) - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$, luego $x \in A'$.

2. $\overline{X - A} = X - \overset{\circ}{A}$.

   Resolución: Se trata de una aplicación directa de la Proposición 2.4.4.

3. $X - \overline{A} = (X - A)^\circ$.

   Resolución: "$\subset$" Si $x \in X - \overline{A}$, entonces $x \notin \overline{A}$, luego existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \varnothing$, es decir, $B(x,r) \subset X - A$, lo que significa que $X - A$ es entorno de x y que $x \in (X - A)^\circ$.
   "$\supset$" Se trata de invertir correctamente el razonamiento de la inclusión anterior.

4. Si $\partial A \cap \partial B = \varnothing$, entonces $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} = (A \cup B)^\circ$.

   Resolución: Como $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ es abierto y $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset A \cup B$, entonces $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^\circ$. probemos la inclusión en sentido contrario. Si $x \in (A \cup B)^\circ$, existe $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x) \subset A \cup B$. Supongamos que $x \notin \overset{\circ}{A}$, entonces para todo $r > 0$, en particular $r < r_x$, $B(x,r) \cap A^c \neq \varnothing$; si para algún $r > 0$, $B(x,r) \subset B$, entonces $x \in \overset{\circ}{B}$ y hemos terminado. Si por el contrario, para todos los $r > 0$, ninguna bola está contenida en B ocurre que todas las bolas cortan a B y su complementario y también a A y su complementario, lo que significa que $x \in \partial A \cap \partial B$, lo cual es imposible y por tanto sólo se puede dar $x \in \overset{\circ}{B}$. Análogamente si suponemos que $x \notin \overset{\circ}{B}$.

5. Si $\partial A \cap \partial B = \varnothing$, entonces $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$.

   Resolución: "$\supset$" Como $\overline{A} \cap \overline{B}$ es cerrado y $\overline{A \cap B}$ es el menor cerrado que contiene a $A \cap B$, entonces $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   "$\subset$" Sea $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, y supongamos que $x \notin \overline{A \cap B}$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A \cap B = \varnothing$, luego $B(x,r) \subset (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$, pero como $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, entonces $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$ y $B(x,r) \cap B \neq \varnothing$, lo que implica que $B(x,r) \cap A^c \neq \varnothing$ y $B(x,r) \cap B^c \neq \varnothing$. Por tanto, $x \in \partial A \cap \partial B$, en contra de la hipótesis. En definitiva debe ocurrir que $x \in \overline{A \cap B}$.

6. Si $\partial A \cap \partial B = \varnothing$, entonces $\partial(A \cap B) = (\overline{A} \cap \partial B) \cup (\partial A \cap \overline{B})$.

   Resolución: "$\subset$" Sea $x \in \partial(A \cap B)$; entonces para cada $r > 0$, se tiene por una parte que $B(x,r) \cap (A \cap B) \neq \varnothing$, es decir $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$ y $B(x,r) \cap B \neq \varnothing$, lo que significa que $x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{B}$. Y por otra parte también ocurre que $B(x,r) \cap (A \cap B)^c \neq \varnothing$; es decir, es no vacío el conjunto

$$B(x,r) \cap (A \cap B)^c = B(x,r) \cap (A^c \cup B^C) = (B(x,r) \cap A^c) \cup (B(x,r) \cap B^c),$$

pero $\partial A \cap \partial B = \varnothing$, luego para algún $r > 0$, o bien $B(x,r) \cap A^c = \varnothing$ y $B(x,r) \cap B^c \neq \varnothing$, o bien ocurre lo contrario. Si suponemos que se da este caso, entonces $x \notin \partial A$ y $x \in \overline{A}$; y además $x \in \partial B$, es decir

$$x \in \partial B \cap \overline{A} \subset (\partial B \cap \overline{A}) \cup (\partial A \cap \overline{B}).$$

De forma similar si se da la situación contraria.
"$\supset$" Supongamos ahora que $x \in (\partial B \cap \overline{A}) \cup (\partial A \cap \overline{B})$ y supongamos que $x \in \partial A \cap \overline{B}$; entonces $x \notin \partial A \cap \overline{B}$ puesto que $\partial A \cap \partial B = \varnothing$. De modo que

$$x \in \overline{A} \ \text{ y por tanto, para todo } \ r > 0, B(x,r) \cap A \neq \varnothing \tag{1}$$

$$x \in \partial B \ \text{ y por tanto, para todo } \ r > 0, B(x,r) \cap B \neq \varnothing \ \text{ y } \ B(x,r) \cap B^c \neq \varnothing. \tag{2}$$

De (1) y (2), se deduce

$$B(x,r) \cap (A \cap B) \neq \varnothing \tag{3}$$

y que

$$B(x,r) \cap (A \cap B)^c = B(x,r) \cap (A^c \cup B^c) = (B(x,r) \cap A^c) \cup (B(x,r) \cap B^) \neq \varnothing. \tag{4}$$

De (4) y de (2) se deduce que $x \in \partial(A \cap B)$.

7. Si $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, entonces $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

   Resolución: "$\subset$" Si $x \in \partial(A \cup B)$ entonces, para todo $r > 0$, se $B(x,r) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$ (1') y $B(x,r) \cap (A \cup B)^c \neq \varnothing$ (2').
   Si nos fijamos en (1'), es no vacío el conjunto

$$B(x,r) \cap (A \cup B) = (B(x,r) \cap A) \cup (B(x,r) \cap B);$$

   por tanto $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$ o $B(x,r) \cap B \neq \varnothing$. Supongamos que ocurre $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$ (3').
   Si ahora nos fijamos en (2'), es no vacío el conjunto

$$B(x,r) \cap (A \cup B)^c = B(x,r) \cap A^c \cap B^c,$$

   luego $B(x,r) \cap A^c \neq \varnothing$, lo que junto con (3') significa que $x \in \partial A \subset \partial A \cup \partial B$. Análogamente se razona para B.
   "$\supset$" Supongamos que $x \in \partial A \cap \partial B$. Como $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$, tenemos que $\partial A \cap \partial B = \varnothing$; de modo que, o bien $x \in \partial A$, o bien $x \in \partial B$, pero no a los dos. Supongamos que $x \in \partial A$. Entonces, para todo $r > 0$, $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$, luego $B(x,r) \cap (A \cup B) \neq \varnothing$ (1"). Pero también $B(x,r) \cap A^c = \varnothing$ y como $A \subset A \cup B$, entonces $A^c \supset (A \cup B)^c$, luego $B(x,r) \cap (A \cup B)^c \subset B(x,r) \cap A^c \neq \varnothing$ (2"). Entonces de (1") y de (2") se deduce que $x \in \partial(A \cup B)$.