

**Control nº 1**

Justifique adecuadamente cada respuesta.

- 1 (20 puntos) Sea la aplicación $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| + 1 & \text{si } x > 0 \text{ o } y > 0 \text{ pero no los dos} \\ |x - y| & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

- (a) Demuestre que se trata de una distancia sobre \mathbb{R} .
(b) Encuentre las bolas de centro en 0 y radio $r > 0$.
- 2 (15 puntos) Demuestre que, en \mathbb{R} con la topología usual, todo intervalo abierto se puede expresar como unión numerable de intervalos cerrados.
- 3 (15 puntos) Demuestre que en \mathbb{R}^n con la distancia usual, la esfera unidad

$$S(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : d_2(x, 0) = 1\}$$

es un conjunto cerrado.

- 4 (20 puntos) Considere en \mathbb{R}^2 con la topología usual el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < -x + 1; 0 < x < 1\} \cup \{(2, 0)\}$$

Haga una representación gráfica y encuentre \overline{A} , $\overset{\circ}{A}$, A' y ∂A .

- 5 (10 puntos) Considere las sucesiones $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0 y la sucesión constante $x_n = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$; ambas en \mathbb{R} con la topología usual. Demuestre que la sucesión $\{(1/n, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto $(0, 2)$ en (\mathbb{R}^2, d_2) .
- 6 (10 puntos) Explique por qué los números racionales son un subconjunto denso en los números reales (topología usual).
- 7 (10 puntos) Explique en qué consiste la topología asociada a un espacio métrico y cómo se puede definir.