Control nº 1

Justifique adecuadamente cada respuesta.

$\boxed{1}$ *(20 puntos)* Sea la aplicación $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y|+1 & \text{si} \quad x>0 \ \text{ o } \ y>0 \ \text{ pero no los dos} \\ |x-y| & \text{en los demás casos} \end{cases}$$

(a) Demuestre que se trata de una distancia sobre $\mathbb{R}$.

(b) Encuentre las bolas de centro en 0 y radio $r>0$.

Resolución: (a) Veamos que d es distancia:

- $d(x,y) \geq 0$ pues o bien es un valor absoluto, o bien un valor absoluto + 1.
- Si $d(x,y)=0$, la única posibilidad es que $d(x,y)=|x-y|=0$, con lo cual $x=y$. Recíprocamente, si $x=y$, según la definición de d, tenemos que $d(x,x)=|x-x|=0$.
- $d(x,y)=d(y,x)$ por la simetría del valor absoluto.
- Por último, la desigualdad triangular:
  (i) Si $x>0$ e $y\leq 0$, entonces $d(x,y)=|x-y|+1\leq|x-z|+|z-y|+1$; si $z>0$, entonces $|x-z|=d(x,z)$ y $|z-y|+1=d(z,y)$, por tanto se cumple. Si, por el contrario $z\leq 0$, entonces $|z-y|=d(z,y)$ y $|x-z|+1=d(x,z)$, también se cumple.
  (ii) Si ahora, $x>0$ e $y>0$, o bien $x\leq 0$ e $y\leq 0$ entonces $d(x,y)=|x-y|\leq|x-z|+|z-y|$, pero también es $d(x,y)\leq|x-z|+|z-y|+1$ o $d(x,y)\leq|x-z|+1+|z-y|+1$, con lo cual se dan todos los casos posibles.

(b) $B(0,r)=\{x\in\mathbb{R} : d(x,0)<r\}$; si $x>0$, entonces $d(x,0)<r$ es $x+1<r$, por lo que en este caso, si $r\leq 1$ la bola no contiene ningún punto; si $r>1$, entonces es $x<r-1$, es decir, el intervalo $(0,r-1)$. Si por el contrario $x\leq 0$, entonces $d(x,0)<r$ es $|x|<r$, es decir $-x<r$ o, cambiando el signo $x>-r$, es decir el intervalo $(-r,0]$. En resumen, si $r<1$, la bola es $B(0,r)=(-r,0]$ y si $r>1$, es $B(0,r)=(-r,r-1)$.

$\boxed{2}$ *(15 puntos)* Demuestre que, en $\mathbb{R}$ con la topología usual, todo intervalo abierto se puede expresar como unión numerable de intervalos cerrados.

Resolución: Sea un intervalo abierto (a,b) con $a,b\in\mathbb{R}$, podemos intentar poner este intervalo como unión de intervalos del tipo $[a+1/n,b-1/n]$, pero hemos de asegurarnos que $a+1/n<b-1/n$, es decir $b-a>2/n$ y por tanto que debemos tomar $n>(b-a)/2$. Entonces

$$(a,b)=\cup_{n>(b-a)/2}[a+1/n,b-1/n], \quad n\in\mathbb{N};$$

en efecto, tal y como los hemos tomado cada intervalo $[a+1/n,b-1/n]$ está incluido en (a,b) y, por tanto también la unión. Sólo resta probar la inclusión en sentido contrario; si $x\in(a,b$, basta tomar n de tal manera que $1/n<\min\{x-a,b-x\}$ y cumpla la condición anterior para que $x\in[a+1/n,b-1/n]$. Si el intervalo es no acotado, por ejemplo $(a,+\infty)$, basta tomar los intervalos cerrados de la forma $[a+1/n,n]$ y de forma similar si el intervalo es no acotado inferiormente.

$\boxed{3}$ *(15 puntos)* Demuestre que en $\mathbb{R}^n$ con la distancia usual, la esfera unidad

$$S(0,1)=\{x\in\mathbb{R}^n : d_2(x,0)=1\}$$

es un conjunto cerrado.

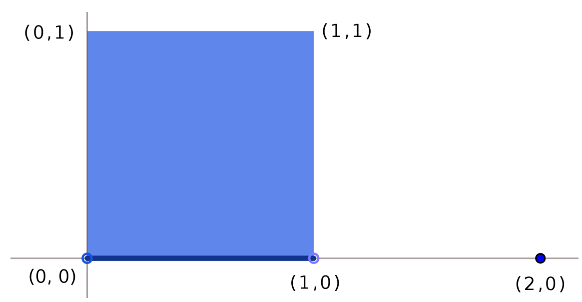
Resolución: Podemos ver que su complementario $\mathbb{R}^n - S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,0) > r\} \cup B(0,1)$, es abierto. Como la bola abierta $B(0,1)$ es abierto, sólo hay que ver que $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x,0) > r\}$ es abierto. Si $x \in \mathbb{R}^n$ con $d(x,0) > r$ y tomamos $s < d(x,0) - r$, vamos a comprobar que $B(x,s) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,0) > r\}$. Sea $y \in B(x,s)$, entonces $d(x,0) \leq d(x,y) + d(y,0)$ es decir, cambiando de miembro $d(x,y)$ y por cómo hemos tomado s, se cumple $d(y,0) \geq d(x,0) - d(x,y) > s + r - s = r$, y por tanto $y \in \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,0) > r\}$, en definitiva $B(x,s) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : d(x,0) > r\}$ que es lo que necesitábamos probar.

$\boxed{4}$ *(20 puntos)* Considere en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y < 1; 0 < x < 1\} \cup \{(2,0)\}$$

Haga una representación gráfica y encuentre $\overline{A}$, $\mathring{A}$, A' y ∂A.

Resolución: Se trata del cuadrado unidad sin los "bordes", con excepción del segmento que une el origen con el punto $(1,0)$, sin estos vértices, junto con el punto $(2,0)$, como muestra el gráfico: Veamos que el segmento que une el origen con el punto $(0,1)$ está en $\overline{A}$; en efecto sea $(0,t)$ un



punto de dicho segmento; entonces, cualquier bola $B((0,t),\varepsilon)$ contiene puntos de A, en concreto el punto $(\varepsilon/2, t)$, ya que $d((0,t),(\varepsilon/2,t)) = \sqrt{\varepsilon^2/4} = \varepsilon/2 < \varepsilon$. De forma análoga se ve que los otros dos segmentos también están en la adherencia. Entonces $\overline{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1; 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(2,0)\}$, es decir el cuadrado con sus aristas y el punto $(2,0)$. No hay más puntos adherentes pues si (s,t) es un punto que no está en el conjunto anterior, por ejemplo $s < 0$, la bola $B((s,t),|s|/2)$ tiene intersección no vacía con A pues la coordenada x de todos sus puntos es menor que cero (análogamente se pueden ver los demás casos). $(2,0)$ es un punto aislado pues la bola $B((2,0),1/2)$ no contiene puntos de A distintos de $(2,0)$ pues la primera coordenada de todos sus puntos es mayor que 1. El interior coincide con el cuadrado sin la arista inferior; en efecto, si (s,t) cumple $0 < s < 1$ y $0 < t < 1$, tomando el radio de la bola como en el Ejemplo Ej.1.28 y efectuando los cálculos que en él se hacen, se prueba que (st) es interior, para ver que el segmento que une $(0,0)$ con $(1,0)$ no pertenece al interior de A, se puede hacer de forma análoga a lo que se hace en el Ejemplo Ej.1.28 para el conjunto B.

La frontera es $\overline{A} - \mathring{A}$ y por tanto está formada por las aristas del cuadrado junto con el punto $(2,0)$. Por último, los puntos de acumulación son los adherentes menos los aislados, de modo que A' es el cuadrado con sus aristas.

$\boxed{5}$ *(10 puntos)* Considere las sucesiones $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a 0 y la sucesión constante $x_n = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$; ambas en $\mathbb{R}$ con la topología usual. Demuestre que la sucesión $\{(1/n, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto $(0,2)$ en $(\mathbb{R}^2, d_2)$.

Resolución: En efecto: $d_2((1/n, x_n),(0,2)) = \sqrt{(1/n)^2 + (x_n - 2)^2}$, como $x_n = 2$ para todo $n^o in\mathbb{N}$, entonces $d_2((1/n, x_n),(0,2)) = 1/n$ lo que significa que la sucesión de las distancias converge a cero y, por tanto la sucesión $\{(1/n, x_n)\}_{n=1}^{\infty}$, converge a $(0,2)$.

$\boxed{6}$ *(10 puntos)* Explique por qué los números racionales son un subconjunto denso en los números reales (topología usual).

Resolución: Vea el Ejemplo Ej.2.18 de material de clase.

$\boxed{7}$ *(10 puntos)* Explique en qué consiste la topología asociada a un espacio métrico y cómo se puede definir.

Resolución: Vea el material de clase, en concreto las Definiciones 1.3.1 y 1.3.2.