# Control nº 2

Justifique adecuadamente cada respuesta.

$\boxed{1}$ *(30 puntos)*

(a) Demuestre que una aplicación entre dos espacios métricos es continua si, y sólo si, la imagen de cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente es una sucesión convergente cuyo límite es la imagen del límite de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

(b) Demuestre que en un espacio métrico, el conjunto formado por una sucesión convergente y su límite, es un conjunto compacto.

(c) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una aplicación entre espacios métricos. Demuestre que, si $f|_K$ es continua en cada subconjunto $K \subset X$ compacto (con la distancia inducida), entonces $f$ es continua en $X$.

$\boxed{2}$ *(20 puntos)* Demuestre que una aplicación $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ entre espacios métricos es continua si, y sólo si, para todo subconjunto $A \subset X$, se cumple $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$\boxed{3}$ *(15 puntos)* Estudie si son, o no compactos en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, los dos conjuntos siguientes.

$$A = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{ 1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \dots \frac{n}{n-1}, \dots : n \in \mathbb{N} - \{1\} \right\}.$$

$\boxed{4}$ *(35 puntos)* Escriba la definición de conjunto totalmente acotado en un espacio métrico y demuestre:

(a) Un subconjunto $A$ de un espacio métrico $(X, d)$ es totalmente acotado si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una cantidad finita de puntos $\{x_1, \dots, x_n\} \subset A$, tales que, para todo $x \in A$, $d(x, x_i) < \varepsilon$, para algún $x_i \in \{x_1, \dots, x_n\}$.

(b) ¿Es cierto que ser acotado es equivalente a ser totalmente acotado?

(c) Demuestre que si un conjunto es compacto, también es totalmente acotado.

(d) ¿La imagen por una aplicación continua, de un conjunto totalmente acotado es un conjunto totalmente acotado?