Control nº 2

Justifique adecuadamente cada respuesta.

$\boxed{1}$ *(30 puntos)*

(a) Demuestre que una aplicación entre dos espacios métricos es continua si, y sólo si, la imagen de cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente es una sucesión convergente cuyo límite es la imagen del límite de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Solución: Véase el Teorema 3.1.3 del material de clase.

(b) Demuestre que en un espacio métrico, el conjunto formado por una sucesión convergente y su límite, es un conjunto compacto.

Solución: Se trata del ejercicio propuesto en el material de clase con el número 4.13, donde está resuelto.

(c) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una aplicación entre espacios métricos. Demuestre que, si $f|_K$ es continua en cada subconjunto $K \subset X$ compacto (con la distancia inducida), entonces f es continua en X.

Solución: Aplicamos los apartados anteriores. Sea $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X cuyo límite es $x \in X$; como el conjunto formado por dicha sucesión y su límite es compacto, por hipótesis, f es continua en tal conjunto y, por tanto, $(f(x_n))_n$ converge a $f(x)$.

$\boxed{2}$ *(20 puntos)* Demuestre que una aplicación $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ entre espacios métricos es continua si, y sólo si, para todo subconjunto $A \subset X$, se cumple $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Solución: Supongamos que f es continua y sea $y \in f(\overline{A})$, entonces $y = f(x)$ para algún $x \in \overline{A}$; por otra parte, como $x \in \overline{A}$, existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in A$ tal que $x_n \longrightarrow x$; como f es continua $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, y $(f(x_n))_n$ es una sucesión en $f(A)$ que converge a $f(x) = y$, de donde $y \in \overline{f(A)}$.
Recíprocamente si $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, sea $F \subset Y$ un cerrado y veamos que $A = f^{-1}(F)$ es cerrado ($A = \overline{A}$). Tenemos

$$f(\overline{A}) = f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F} = F$$

Por tanto

$$\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) = f(f^{-1}(F)) = A$$

y como $A \subset \overline{A}$, concluimos que $A = \overline{A}$ y que f es continua.

$\boxed{3}$ *(15 puntos)* Estudie si son, o no compactos en $\mathbb{R}$ con la distancia usual, los dos conjuntos siguientes.

$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \dots \frac{n}{n-1}, \dots : n \in \mathbb{N} - \{1\}\right\}.$$

Solución: Algunos elementos de conjunto A son $0, 3/2, -2/3, 5/4, -4/5, \dots$ (para $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ respectivamente. No es compacto por no ser cerrado, pues la sucesión de los términos pares es $((2n+1)/(2n))_{n=1}^{\infty}$, que converge a 1 pues $|(2n+1)/(2n) - 1| = 1/(2n)$ y $1 \notin A$.
El conjunto B es precisamente la sucesión $(n/(n+1))_{n=1}^{\infty}$, que converge a 1, unión con $\{1\}$. Es decir es una sucesión junto con su límite, luego según el apartado (b) del problema nº1 de este control, B es compacto.

$\boxed{4}$ *(35 puntos)* Escriba la definición de conjunto totalmente acotado en un espacio métrico (vea el capítulo 4 del material de clase) y demuestre:

(a) Un subconjunto A de un espacio métrico (X, d) es totalmente acotado si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$, existe una cantidad finita de puntos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$, tales que, para todo $x \in A$, $d(x, x_i) < \varepsilon$, para algún $x_i \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Solución: Si suponemos que A es totalmente acotado, dado $\varepsilon > 0$, hay una cantidad finita de puntos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset A$, tales que $A \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)$ lo que significa que cada $x \in A$ está en una de estas bolas $x \in B(x_i, \varepsilon)$ y por tanto $d(x_i, x) < \varepsilon$. Para el recíproco, sólo hay que invertir el razonamiento.

(b) ¿Es cierto que ser acotado es equivalente a ser totalmente acotado?

Solución: Vea la Proposición 4.5.5 y Ejemplo Ej.4.15.

(c) Demuestre que si un conjunto es compacto, también es totalmente acotado.

Solución: Si A es una conjunto compacto, dado $r > 0$, la familia de bolas $\{B(x, r)\}_{\{x \in A\}}$ es un recubrimiento abierto de A. Por tanto se puede extraer un subrecubrimiento finito $B(x_1, r) \ldots, B(x_n, r)$. Como esto es para todo $r > 0$, A es totalmente acotado.

(d) ¿La imagen por una aplicación continua, de un conjunto totalmente acotado es un conjunto totalmente acotado?

Solución: No. La aplicación $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, ambos espacios con la topología usual, definida como $f(x) = 1/x$ es continua. El conjunto $(0, 1)$ es totalmente acotado y su imagen $f(0, 1) = (1, +\infty)$ no es un conjunto acotado y, por tanto no estotalmente acotado.