Control nº 3

Justifique adecuadamente cada respuesta.

$\boxed{1}$ *(20 puntos)* Demuestre que en un espacio métrico, la intersección de un número finito de abiertos es un abierto. Muestre con un ejemplo que la intersección arbitraria de abiertos no es necesariamente un abierto.

$\boxed{2}$ *(20 puntos)* Demuestre que si D es un subconjunto denso en un espacio métrico (X, d), todo punto $x \in X - D$ es límite de una sucesión de puntos de D cuyos términos son distintos dos a dos.

$\boxed{3}$ *(20 puntos)* Demuestre que $([0, 1], d)$ es un espacio métrico con

$$d(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y \quad \text{si} \quad x \neq y \\ 0 \quad \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

Caracterice las bolas abiertas.

$\boxed{4}$ *(20 puntos)* Considere el conjunto $A = \{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Calcule justificadamente su interior, su adherencia, su frontera y sus puntos de acumulación considerado como subconjunto de $\mathbb{R}$ con la distancia usual. Idem suponiendo $\mathbb{R}$ con la distancia discreta.

$\boxed{4}$ *(20 puntos)* Sea $A = [-1, 1) \cup (1, 2] \cup \{5, 6\}$ y considérelo como subespacio de $\mathbb{R}$ con la distancia inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

a) Estudie si el conjunto $\{5, 6\}$ es abierto o cerrado en A; o ni lo uno ni lo otro.

b) Encuentre un abierto en A que contenga a -1, encuentre también un cerrado que lo contenga.

c) Calcule la adherencia de $[-1, 1)$ en A y el interior de $[-1, 1/2)$ también en A.

d) Demuestre que $\{5\}$ no es aislado en $\mathbb{R}$ pero si lo es en A.