Control nº 3

Justifique adecuadamente cada respuesta.

$\boxed{1}$ *(20 puntos)* Demuestre que en un espacio métrico, la intersección de un número finito de abiertos es un abierto. Muestre con un ejemplo que la intersección arbitraria de abiertos no es necesariamente un abierto.

Resolución: Vea el teorema 1.3.6(c) y el ejemplo Ej.1.30.

$\boxed{2}$ *(20 puntos)* Demuestre que si D es un subconjunto denso en un espacio métrico (X, d), todo punto $x \in X - D$ es límite de una sucesión de puntos de D cuyos términos son distintos dos a dos.

Resolución: D es denso si $\overline{D} = X$, por tanto si $x \in X - D$, $x \in D'$ y podemos aplicar el problema P.2.23.

$\boxed{3}$ *(20 puntos)* Demuestre que $([0, 1], d)$ es un espacio métrico con

$$d(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 \quad \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

Caracterice las bolas abiertas.

Resolución: Como $x, y \in [0, 1]$, $2 - x - y \geq 0$, luego $d(x, y) \geq 0$. La simetría de $d(x, y)$ se deduce de la conmutatividad de la suma de números reales. Por otra parte, si $d(x, y) = 0$, para que fuera $2 - x - y = 0$, debería ocurrir $x = y = 1$, pero en este caso $d(1, 1) = 0$; por tanto $x = y$. Si $x = y$, entonces $d(x, y) = 0$ por la propia definición.

$\boxed{4}$ *(20 puntos)* Considere el conjunto $A = \{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Calcule justificadamente su interior, su adherencia, su frontera y sus puntos de acumulación considerado como subconjunto de $\mathbb{R}$ con la distancia usual. Idem suponiendo $\mathbb{R}$ con la distancia discreta.

Resolución: Observemos que la distancia usual entre dos elementos consecutivos es

$$\left|(n + 1) - \frac{1}{n + 1} - n + \frac{1}{n}\right| = 1 + \frac{1}{n(n + 1)}$$

lo que significa que si tomamos $\varepsilon < 1$ la bola $B(1 + \frac{1}{n}, \varepsilon)$ no contiene ningún punto de A excepto el centro, con lo que el interior es vacío. Por tanto todos los puntos son aislados y el conjunto es cerrado y no tiene puntos de acumulación.
Veamos ahora la distancia discreta. A es abierto en este caso puesto que, para la distancia discreta todos los conjuntos son abiertos y cerrados, lo que significa que A coincide con su interior y con su adherencia; como todos los puntos son interiores, la frontera es vacía y tampoco hay puntos de acumulación.

$\boxed{5}$ *(20 puntos)* Sea $A = [-1, 1) \cup (1, 2] \cup \{5, 6\}$ y considérelo como subespacio de $\mathbb{R}$ con la distancia inducida por la usual de $\mathbb{R}$.

a) Estudie si el conjunto $\{5, 6\}$ es abierto o cerrado en A; o ni lo uno ni lo otro.
Resolución: Es abierto pues $\{5, 6\} = (3, 7) \cap A$ y es intersección de un abierto de $\mathbb{R}$ con A.

b) Encuentre un abierto en A que contenga a -1, encuentre también un cerrado que lo contenga.

Resolución: El conjunto $[-1,0) \subset A$ es abierto en A que contiene a -1 ya que es intersección de un abierto de $\mathbb{R}$ con A: $(-2,0) \cap A = [-1,0)$; el conjunto $[-1,0] = [-1,0] \cap A$ es cerrado en A por ser intersección de un cerrado de $\mathbb{R}$ con A y contiene a -1.

c) Calcule la adherencia de $[-1,1)$ en A y el interior de $[-1,1/2)$ también en A.

Resolución: El conjunto $[-1,1)$ es cerrado en A pues es la intersección de $[-1,1]$ con A, luego coincide con su adherencia. De la misma forma como $[-1,1/2) = (-2,1/2) \cap A$; $[-1,1/2)$ es abierto en A y coincide con su interior.

d) Demuestre que $\{5\}$ no es aislado en $\mathbb{R}$ pero si lo es en A.

Resolución: $\{5\}$ no es aislado en $\mathbb{R}$ pues cualquier bola en $\mathbb{R}$ de centro 5 contiene otros números reales. Sin embargo si lo es A ya que la bola $B_A(5,1/2) = (9/2,11/2) \cap A = \{5\}$.