Examen final

Justifique adecuadamente cada respuesta.

$\boxed{1}$ *(30 puntos)* Considere un espacio métrico (X, d) y sea la aplicación $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $\rho(x, y) = \min\{2, d(x, y)\}$.

(a) Demuestre que ρ es una distancia.

(b) Encuentre las bolas de centro $x \in X$ y radio $r > 0$.

(c) Demuestre que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ es de Cauchy en (X, d) si, y sólo si, es de Cauchy en (X, ρ).

(d) Demuestre que (X, d) es completo si, y sólo si, (X, ρ) es completo.

$\boxed{2}$ *(10 puntos)* Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ abierto y $B \subset X$ un subconjunto cualquiera. Demuestre que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$; proporcione un ejemplo que ponga de manifiesto que la inclusión puede ser estricta.

$\boxed{3}$ *(10 puntos)* En $\mathbb{R}$ con la distancia usual, estudie la adherencia, el interior, la frontera y los puntos de acumulación del conjunto

$$A = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

¿Es compacto?

$\boxed{4}$ *(25 puntos)*

a) Demuestre que, en un espacio métrico (X, d), un subconjunto $F \subset X$ es denso si, y solo si, para todo abierto $A \subset X$ se cumple que $A \cap F \neq \varnothing$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua (topología usual) tal que $f(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{Q}$. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) Estudie si $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ con la distancia discreta. ¿Cómo son los conjuntos densos en $\mathbb{R}$ con la topología discreta?.

$\boxed{5}$ *(25 puntos)*

a) Demuestre que en un espacio métrico un subconjunto compacto es cerrado.

b) Muestre con un ejemplo que el recíproco no es cierto, en general.

c) ¿Conoce alguna condición que se le pueda imponer a un espacio métrico para que un subconjunto cerrado sea compacto?