Examen final

Justifique adecuadamente cada respuesta.

$\boxed{1}$ *(30 puntos)* Considere un espacio métrico (X,d) y sea la aplicación $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $\rho(x,y) = \text{mín}\{2, d(x,y)\}$.

(a) Demuestre que ρ es una distancia.

(b) Encuentre las bolas de centro $x \in X$ y radio $r > 0$.

(c) Demuestre que una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ es de Cauchy en (X,d) si, y sólo si, es de Cauchy en (X,ρ).

(d) Demuestre que (X,d) es completo si, y sólo si, (X,ρ) es completo.

Resolución: (a) Tengamos en cuenta que d es distancia. Entonces

- $\rho(x,y) \geq 0$ por ser el mínimo de dos cantidades no negativas.
- $\rho(x,y) = 0$ si, y sólo si $0 = \text{mín}\{2, d(x,y)\} = d(x,y)$ si, y sólo si (d es distancia), $x = y$.
- $\rho(x,y) = \text{mín}\{2, d(x,y)\} =$ (d es distancia) $= \text{mín}\{2, d(y,x)\} = \rho(y,x)$.
- $\rho(x,y) = \text{mín}\{2, d(x,y)\} \leq \text{mín}\{2, d(x,z) + d(z,y)\} \leq$ $\text{mín}\{2, d(x,z)\} + \text{mín}\{2, d(z,y)\} = \rho(x,z) + \rho(z,y)$

(b) $B_\rho(x,r) = \{y \in X : \text{mín}\{2, d(x,y)\} < r$. Como se trata del mínimo entre 2 y $d(x,y)$, si $r \geq 2$ el mínimo de ambas cantidades siempre es menor o igual que 2, lo que significa que, en este caso la bola coincide con todo el espacio $B_\rho(x,r) = X$. Si suponemos que $r < 2$, entonces ha de ser $\text{mín}\{2, d(xy)\} < r < 2$, es decir ha de ocurrir que $\text{mín}\{2, d(x,y)\} = d(x,y) < r$ y, por tanto la bola coincide con la bola para la distancia d: $B_\rho(x,r) = B_d(x,r)$.

(c) "$\Rightarrow$" Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en (X,d), entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, si $m,n \geq n_0$, entonces $d(x_n,x_m) < \varepsilon$; observemos que siempre podemos tomar $\varepsilon < 2$, pues si fuera mayor, como esto se cumple para todo ε, tomando uno más pequeño también se verifica para el más grande. Entonces resulta evidente que si $n,m \geq n_0$, se cumple que $\rho(x_m,x_n) = \text{mín}\{2, d(x_m,x_n)\} < \varepsilon$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en (X,ρ). El recíproco se obtiene invirtiendo el razonamiento.

(d) "$\Rightarrow$" Si (X,d) es completo, toda sucesión de Cauchy es convergente. Para ver que (X,ρ) es completo, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy para ρ, por el apartado (c) anterior, también es de Cauchy para d, luego para esta distancia es convergente a un punto $x \in X$. Por tanto dado $\varepsilon > 0$ (y menor que 2), existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica que $d(x_n,x) < \varepsilon$; por tanto también sucede que $\rho(x_n,x) = \text{mín}\{2, d(x_n,x)\} \leq \text{mín}\{2,\varepsilon\} = \varepsilon$, lo que significa que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x en (X,ρ) y este espacio también es completo. El recíproco consiste en invertir adecuadamente el razonamiento.

$\boxed{2}$ *(10 puntos)* Sea (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ abierto y $B \subset X$ un subconjunto cualquiera. Demuestre que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$; proporcione un ejemplo que ponga de manifiesto que la inclusión puede ser estricta.

Resolución: Sea $x \in A \cap \overline{B}$ y veamos que $x \in \overline{A \cap B}$. Como $x \in A$ abierto, entonces, para todo $r > 0$ $B(x,r) \cap A \neq \varnothing$; además esta intersección es un abierto (por ser intersección de dos abiertos), que contiene a x y como $x \in \overline{B}$, tenemos que $(B(x,r) \cap A) \cap B \neq \varnothing$ y aplicando la asociatividad de la intersección $B(x,r) \cap (A \cap B) \neq \varnothing$; recordemos que esto es para todo $r > 0$, lo que significa que $x \in \overline{A \cap B}$.

La inclusión puede ser estricta, basta tomar $A = (0,1)$, $B = (0,2]$, entonces $\overline{B} = [0,2]$ y $A \cap \overline{B} = (0,1)$, $A \cap B = (0,1)$ y $\overline{A \cap B} = [0,1]$.

$\boxed{3}$ *(10 puntos)* En $\mathbb{R}$ con la distancia usual, estudie la adherencia, el interior, la frontera y los puntos de acumulación del conjunto

$$A = \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

¿Es compacto?

Resolución: Escribamos algunos de los elementos de conjunto, que no es otra cosa que una sucesión. Si a cada elemento le llamamos a_n, tenemos $a_1 = 0$, $a_2 = 1 + 1/2 = 3/2$, $a_3 = 1 - 1/2 = 1/2$, $a_4 = 1 + 1/4 = 5/4$, $a_5 = 1 - 1/5 = 4/5$, $a_6 = 1 + 1/6 = 7/6$, etc.
Observemos que la sucesión de los términos impares (n impar) es $(1 - 1/n)_n$ y la de los pares (n par) $(1 + 1/n)_n$, parece claro que ambas convergen a 1 y que también lo hará la sucesión completa; en efecto, $|1 - (1 + (-1)^n/n)| = |1 - 1 - (-1)^n/n)| = | - (-1)^n/n)| = 1/n$ sucesión que converge a cero y por tanto nuestra sucesión converge a 1, pero $1 \notin A$. Entonces $1 \in \overline{A}$ y no hay más puntos adherentes ya que cualquier punto adherente debería ser límite de una subsucesión de A y como A es una sucesión convergente, todas las subsucesiones tienen el mismo límite; por tanto $\overline{A} = \{1\} \cup A$. Esto implica que el único punto de acumulación también es 1.

Respecto al interior, $\overset{\circ}{A} = \varnothing$ pues se trata de un conjunto de números racionales y toda bola centrada en uno de ellos contiene irracionales.
Por último no es compacto pues no es cerrado.

$\boxed{4}$ *(25 puntos)*

a) Demuestre que, en un espacio métrico (X, d), un subconjunto $F \subset X$ es denso si, y solo si, para todo abierto $A \subset X$ se cumple que $A \cap F \neq \varnothing$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua (topología usual) tal que $f(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{Q}$. Demuestre que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) Estudie si $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ con la distancia discreta. ¿Cómo son los conjuntos densos en $\mathbb{R}$ con la topología discreta?.

Resolución: (a) Se trata de la Proposición 2.6.10 del material de clase.

(b) f es continua en un punto x si, y solo, para cada sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente a x se cumple que $f(x_n) \longrightarrow f(x)$. Cómo $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, cada número real x es límite de una sucesión de racionales $(q_n)_{n=1}^{\infty}$, por tanto, según la afirmación anterior $f(q_n) \longrightarrow f(x)$, pero $f(q_n) = 0$ por hipótesis, de modo que se trata de la sucesión constante con todos sus términos nulos, luego su límite es 0, es decir $f(x) = 0$.

(c) $\mathbb{Q}$ no es denso en $\mathbb{R}$ para la distancia discreta ya que no verifica el apartado (a) anterior. En efecto, los conjuntos unipuntuales son abiertos y si x es irracional, $\{x\}$ no contiene racionales. Según esto el único conjunto denso es el espacio total.

$\boxed{5}$ *(25 puntos)*

a) Demuestre que en un espacio métrico un subconjunto compacto es cerrado.

b) Muestre con un ejemplo que el recíproco no es cierto, en general.

c) ¿Conoce alguna condición que se le pueda imponer a un espacio métrico para que un subconjunto cerrado sea compacto?

Resolución: (a) Se trata de la Proposición 4.2.5 del material de clase.

(b) El intervalo $[0, \infty)$ es cerrado y no es compacto ya que no es acotado.

(c) Que el espacio sea compacto. Para demostrarlo vea la Proposición 4.2.4 del material de clase.