Examen final

Justifique adecuadamente cada respuesta.

$\boxed{1}$ *(15 puntos)* Considere en $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual los conjuntos

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/n, 0 < y \leq 1\} \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N};$$

y $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Estudie la adherencia, el interior, la frontera y los puntos de acumulación de A.

$\boxed{2}$ *(20 puntos)* Si d_2 es la distancia usual en $\mathbb{R}^2$, considere la aplicación

$$d(x, y) = \frac{d_2(x, y)}{1 + d_2(x, y)}.$$

a) Demuestre que d es una distancia sobre $\mathbb{R}^2$

b) Demuestre que d es una distancia acotada por 1.

c) Describa las bolas para la distancia d.

d) Demuestre que d es equivalente a d_2.

$\boxed{3}$ *(25 puntos)* Escriba la definición de aplicación abierta, de aplicación cerrada y de homeomorfismo.

a) ¿Puede ser el intervalo $[-1, 1]$ homeomorfo a $\mathbb{R}$, ambos con la distancia usual? Justifique la respuesta.

b) Demuestre que si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación biyectiva entre espacios métricos, son equivalentes:

(i) f es homeomorfismo.

(ii) f es continua y abierta.

c) Pruebe que $f(x) = ax + b$ con $a, b > 0$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual. ¿Es una isometría?

$\boxed{4}$ *(15 puntos)* Sea (X, d) un espacio métrico, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión de Cauchy y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión cualquiera, tales que $d(x_n, y_n) < 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre:

(a) La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

(b) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$ si, y sólo si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a dicho punto.

$\boxed{5}$ *(25 puntos)*

a) Demuestre que en un espacio métrico un subconjunto compacto es cerrado y acotado.

b) Demuestre que si en un espacio métrico toda bola cerrada es compacta, entonces el espacio es completo.

c) Demuestre que si en un espacio métrico toda bola cerrada es compacta, entonces todo conjunto cerrado y acotado es compacto.