Examen final

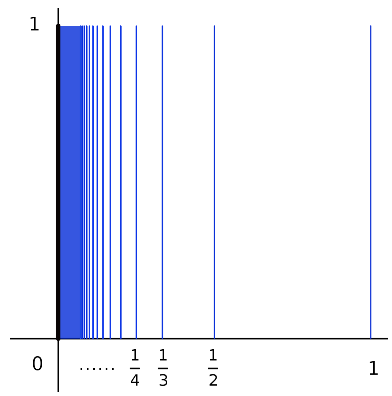
Justifique adecuadamente cada respuesta.

$\boxed{1}$ *(15 puntos)* Considere en $\mathbb{R}^2$ con la distancia usual los conjuntos

$$A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1/n, 0 < y \leq 1\} \quad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N};$$

y $A = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Estudie la adherencia, el interior, la frontera y los puntos de acumulación de A.

Resolución: Cada conjunto A_n es el segmento vertical que une el punto $(1/n, 0)$ y el $(1/n, 1)$, excluido el primero de los dos. De modo que A es la unión de todos esos segmentos. Segmentos que se van aproximando tanto como queramos al segmento que une el origen con el punto $(0, 1)$. Gráficamente es el conjunto siguiente El interior es vacío pues si $(1/n, s)$, con $s \in (0, 1]$ es un punto



de A_n, cualquier bola $B((1/n, s), \varepsilon)$ contiene puntos cuya primera coordenada es irracional, con lo cual no ha ninguna bola centrada en un punto de A que esté contenida en A.
Además de A los puntos de la forma $(1/n, 0)$ también son adherentes, pues cualquier bola $B((1/n, 0), \varepsilon)$ contiene al punto $(1/n, s)$ con tal de que $s < \varepsilon$ y $s \leq 1$; además el segmento que une los el origen y el punto $(0, 1)$ ambos inclusive, también forma parte de la adherencia pues cualquier bola $B((0, s), \varepsilon)$ contiene un punto $(1/n, s)$ con tal de que $1/n < \varepsilon$. De forma similar se puede razonar que no hay más puntos adherentes, de modo que $\overline{A}$ está formado por A, todos los puntos $(1/n, 0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y el segmento (cerrado) que une el origen con el punto $(0, 1)$.

Como $\partial A = \overline{A} - \mathring{A}$, entonces $\partial A = \overline{A}$ y cómo no hay puntos aislados, $A' = \overline{A}$.

$\boxed{2}$ *(20 puntos)* Si d_2 es la distancia usual en $\mathbb{R}^2$, considere la aplicación

$$d(x, y) = \frac{d_2(x, y)}{1 + d_2(x, y)}.$$

a) Demuestre que d es una distancia sobre $\mathbb{R}^2$

b) Demuestre que d es una distancia acotada por 1.

c) Describa las bolas para la distancia d.

d) Demuestre que d es equivalente a d_2.

Resolución: (a) Tengamos en cuenta que d_2 es distancia. Entonces

- $d(x, y) \geq 0$ por ser cociente de dos cantidades no negativas, cuyo denominador no se anula.

- $d(x,y)=0$ si, y sólo si $d_2(x,y)=0$, si, y solos si $x=y$.
- $d(x,y)=d_2(x,y)/(1+d_2(x,y))=d_2(y,x)/(1+d_2(y,x))=d(y,x)$.
- Para ver la desigualdad triangular, observemos que la aplicación $f(x)=x/(1+x)$ es creciente en $[0,+\infty)$ pues su derivada $f'(x)=1/(1+x)^2$ es positiva. Por tanto, como al ser d_2 distancia se cumple $d_2(x,y)\leq d_2(x,z)+d_2(z,y)$ podemos aplicar que la función es creciente y

$$d(x,y)=\frac{d_2(x,y)}{1+d_2(x,y)}\leq\frac{d_2(x,z)+d_2(z,y)}{1+d_2(x,z)+d_2(z,y)}=(1)$$

Entonces, "disminuyendo" los denominadores

$$(1)=\frac{d_2(x,z)}{1+d_2(x,z)+d_2(z,y)}+\frac{d_2(z,y)}{1+d_2(x,z)+d_2(z,y)}\leq\frac{d_2(x,z)}{1+d_2(x,z)}+\frac{d_2(z,y)}{1+d_2(z,y)}$$

y se verifica la desigualdad triangular.

(b) Está claro puesto que se trata de un cociente entre dos cantidades positivas cuyo denominador es una unidad mayor que el numerador.
(c) Como la distancia es siempre menor que 1, si $r\geq 1$ la bola $B(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^2:d(a,x)<r\}$ coincide con $\mathbb{R}^2$ pues la distancia entre dos puntos cualesquiera es menor que r. Si $r<1$, entonces $d(a,x)<r$ es equivalente a

$$\frac{d_2(a,x)}{1+d_2(a,x)}<r\ \text{ es decir, }\ d_2(a,x)<r+rd_2(a,x)$$

y operando

$$d_2(a,x)<\frac{r}{1-r}$$

lo que significa que $B(a,r)=B_2(a,r/(1-r))$, es decir, el circulo, sin su circunferencia, de centro a y radio $r/(1-r)$.
(d) Para ver que son equivalentes sólo hay que aplicar el apartado (c) anterior pues cada bola para la distancia d, si $r\geq 1$, como coincide con todo el espacio, contiene una bola para la distancia d_2, y si $r<1$ también pues acabamos de ver que $B(a,r)=B_2(a,r/(1-r))$. De forma similar, según lo hecho en el apartado anterior $B_2(a,r)=B(a,r/(1+r))$.

$\boxed{3}$ *(25 puntos)* Escriba la definición de aplicación abierta, de aplicación cerrada y de homeomorfismo.

a) ¿Puede ser el intervalo $[-1,1]$ homeomorfo a $\mathbb{R}$, ambos con la distancia usual? Justifique la respuesta.

b) Demuestre que si $f:X\longrightarrow Y$ es una aplicación biyectiva entre espacios métricos, son equivalentes:

(i) f es homeomorfismo.

(ii) f es continua y abierta.

c) Pruebe que $f(x)=ax+b$ con $a,b>0$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la topología usual. ¿Es una isometría?

Resolución: Para las definiciones vea la Sección 3.2 del material de clase.
(a) No, pues si f es un homeomorfismo entre ambos espacios, como f es continua y $[-1,1]$ es compacto, $f([-1,1])$ es compacto y como f es biyectiva $f([-1,1])=\mathbb{R}^2$ que no es compacto.
(b) "(i)→(ii)" Por definición de homeomorfismo, f es continua. Para ver que es abierta, como f^{-1} es

continua, entonces la anti-imagen por f^{-1} de cualquier abierto, es abierto, es decir $(f^{-1})^{-1}(A)f(A)$ es abierto si A es abierto, luego f es abierta.
"(ii)→(i)" Como es biyectiva, existe f^{-1}, para ver que es homeomorfismo sólo hay que ver que f^{-1} es continua, es decir que si $A \subset X$ es abierto entonces $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ es abierto, que lo es por ser f abierta.
(c) Es continua puesto que, si $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $|f(x) - f(x_0)| = |ax + b - ax_0 - b| = a|x - x_0|$, por tanto dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \varepsilon/a$ para que si $|x - x_0| < \delta$, ocurra que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Es biyectiva pues tiene inversa $f^{-1}(x) = (x - b)/a$ ya que $f^{-1}(f(x)) = (ax + b - b)/a = x$ y también $f(f^{-1})(x) = x$. Probar que f^{-1} es continua es similar al caso anterior de f.
No es isometría, en general, pues según hemos visto $|f(x) - f(x_0)| = a|x - x_0|$ que es distinto de $|x - x_0|$ salvo que $a = 1$, en cuyo caso sería isometría.

$\boxed{4}$ *(15 puntos)* Sea (X, d) un espacio métrico, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión de Cauchy y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ una sucesión cualquiera, tales que $d(x_n, y_n) < 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestre:

(a) La sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

(b) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$ si, y sólo si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a dicho punto.

Resolución: (a) Aplicando la desigualdad triangular, tenemos, para todo $m, n \in \mathbb{N}$

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - y_n| + |y_n - y_m| + |y_m - x_m| < \frac{1}{n} + |y_n - y_m| + \frac{1}{m} = (2).$$

Por otra parte, dado $\varepsilon > 0$, como la sucesión $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, existe n_1 tal que si $n, m > n_1$, entonces $1/n < \varepsilon/3$ y $1/m < \varepsilon/3$. Como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe n_2 tal que, si $m, n > n_2$, entonces $|y_n - y_m| < \varepsilon/3$. Si tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $n, m > n_0$ se dan las dos condiciones a la vez y entonces

$$|x_n - x_m| < (2) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

y por tanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.
(b) "⇒" Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \in X$ y veamos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ converge al mismo punto. Aplicando la desigualdad triangular, tenemos

$$d(y_n, x) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x)(3).$$

Como $d(x_n, y_n) < 1/n$ y la sucesión $(1/n)_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe n_1 tal que si $n > n_1$, entonces $1/n < \varepsilon/2$; por otra parte la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x luego existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_2$, entonces $d(x_n, x) < \varepsilon/2$. Si tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $n > n_0$ se dan las dos condiciones a la vez y, por tanto

$$d(y_n, x) \leq (3) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por tanto $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene por límite x. El recíproco es igual cambiando $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ por $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

$\boxed{5}$ *(25 puntos)*

a) Demuestre que en un espacio métrico un subconjunto compacto es cerrado y acotado.

b) Demuestre que si en un espacio métrico toda bola cerrada es compacta, entonces el espacio es completo.

c) Demuestre que si en un espacio métrico toda bola cerrada es compacta, entonces todo conjunto cerrado y acotado es compacto.

Resolución: (a) Vea la Proposición 4.2.5 del material de clase.
(b) Una sucesión de Cauchy es acotada (Proposición 5.1.3), por tanto está contenida en una bola cerrada, que por hipótesis en compacta y, por tanto secuencialmente compacta (Teorema 4.6.2), lo que significa que la sucesión posee una subsucesión convergente. Pero como la sucesión es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, la sucesión converge al mismo límite que la subsucesión (Proposición 5.15). En definitiva, toda sucesión de Cauchy es convergente y, por tanto, el espacio es completo.
(c) Sea K es un conjunto cerrado y acotado. Por ser acotado está contenido en una bola cerrada que, por hipótesis es compacta; de modo que K es un cerrado contenido en un compacto, por tanto K es compacto (Teorema 4.2.4).