Examen final

Justifique adecuadamente sus respuestas.

$\boxed{1}$ *a)* *(7 puntos)* Demuestre que si $S = (x_n)_n$ es una sucesión en un espacio métrico (X, d), entonces $\overline{S}$ es el conjunto formado por los límites de las subsucesiones convergentes de S.

b) *(7 puntos)* (T) Si A es un subconjunto de un espacio métrico, demuestre que x es un punto aislado de A si, y sólo si $x \in \overline{A}$, pero $x \notin A'$.

c) *(6 puntos)* Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ no tiene puntos aislados, entonces $\overline{A}$ tampoco los tiene.

$\boxed{2}$ Considere la aplicación $d : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

a) *(6 puntos)* Demuestre que se trata de una distancia sobre $[0, +\infty)$.

b) *(8 puntos)* Caracterice las bolas abiertas.

c) *(6 puntos)* Considere la distancia inducida por la usual de $\mathbb{R}$ sobre $[0, +\infty)$. ¿Es equivalente a la anterior?

$\boxed{3}$ *a)* *(10 puntos)* Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos aplicaciones continuas, considerando la distancia usual. Demuestre que la aplicación $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $h(x, y) = (f(x), g(y))$ es continua considerando en $\mathbb{R}^2$ la distancia usual (o cualquiera equivalente).

b) *(10 puntos)* Demuestre que un espacio métrico (X, d) es conexo si, y sólo si, toda aplicación continua de X en el espacio $\{0, 1\}$ con la distancia discreta, es constante.

$\boxed{4}$ Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre:

a) *(6 puntos)* (T) Toda sucesión convergente es de Cauchy. ¿Es cierto el recíproco?

b) Sea $(x_n)_n \subset X$ una sucesión; para cada $n \in \mathbb{N}$ sea el conjunto $A_n = \{x_m : m \geq n\}$. Demuestre:

1) *(7 puntos)* Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.

2) *(7 puntos)* $(x_n)_n$ es de Cauchy si, y sólo si, $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{\delta(A_n)\} = 0$, donde $\delta(A_n)$ es el diámetro del conjunto A_n. (Recuerde $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$).

$\boxed{5}$ *a)* *(10 puntos)* (T) Demuestre que todo conjunto compacto es cerrado y acotado.

b) *(10 puntos)* Demuestre que un espacio métrico es compacto si, y sólo si, toda familia de cerrados disjuntos posee una subfamilia finita también disjunta.