Examen final

Justifique adecuadamente sus respuestas.

1 a) *(7 puntos)* Demuestre que si $S = (x_n)_n$ es una sucesión en un espacio métrico (X, d), entonces $\overline{S}$ es el conjunto formado por los límites de las subsucesiones convergentes de S.

Solución: Según la Proposición 2.6.6, $x \in \overline{S}$ si, y sólo si, existe una sucesión en S, es decir una subsucesión, convergente hacia x, lo que prueba la propiedad.

b) *(7 puntos)* (T) Si A es un subconjunto de un espacio métrico, demuestre que x es un punto aislado de A si, y sólo si $x \in \overline{A}$, pero $x \notin A'$.

Solución: Si $x \in A$ es un punto aislado, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$ con lo que $x \notin A'$. Recíprocamente, si $x \in \overline{A}$, para todo $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \varnothing$, pero si $x \notin A'$, existe $r_x > 0$ tal que la bola $B(x, r_x)$ no tiene puntos en común con A distintos de x, luego este punto es aislado.

c) *(6 puntos)* Si (X, d) es un espacio métrico y $A \subset X$ no tiene puntos aislados, entonces $\overline{A}$ tampoco los tiene.

Solución: Si $x \in \overline{A}$ es aislado, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap \overline{A} = \{x\}$; entonces tenemos dos posibilidades: primera, $x \in A$, con lo que x sería un punto aislado de A, lo que es imposible por hipótesis; segunda, que $x \notin A$, entonces $B(x, r) \cap A = \varnothing$ y entonces $x \notin \overline{A}$, también en contra de lo que hemos supuesto.

2 Considere la aplicación $d : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 \quad \text{si} & x = y \end{cases}$$

a) *(6 puntos)* Demuestre que se trata de una distancia sobre $[0, +\infty)$.

Solución: La aplicación es no negativa por la propia definición y simétrica por la propiedad conmutativa de los números reales. $d(x, y) = 0$ si, y sólo si $x = y$ también por la propia definición. Por último, como $x, y, z \geq 0$, $d(x, y) = x + y \leq x + z + z + y = d(x, z) + d(z, y)$.

b) *(8 puntos)* Caracterice las bolas abiertas.

Solución: Si $a \in [0, +\infty)$, $B(a, r) = \{x \in [0, +\infty) : x + a < r\}$, es decir $x < r - a$, lo que significa que si $r \leq a$, entonces $B(a, r) = \{a\}$. Y si $r > a$, entonces $B(a, r) = [0, r - a)$.

c) *(6 puntos)* Considere la distancia inducida por la usual de $\mathbb{R}$ sobre $[0, +\infty)$. ¿Es equivalente a la anterior?

Solución: No son equivalentes pues para esta distancia los puntos son abiertos y para la usual no lo son.

3 a) *(10 puntos)* Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos aplicaciones continuas, considerando la distancia usual. Demuestre que la aplicación $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $h(x, y) = (f(x), g(y))$ es continua considerando en $\mathbb{R}^2$ la distancia usual (o cualquiera equivalente).

Solución: Sea $(a, b) \in \mathbb{R}$, como f es continua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|x - a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ y como g es continua, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|y - b| < \delta_2$ implica que $|g(y) - g(b)| < \varepsilon$. Entonces si tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, y

$$d_\infty((x, y), (a, b)) = \max\{|x - a|, |y - b|\} < \delta$$

se cumple

$$d_\infty((f(x), g(y)), (f(a), g(b)) = \max\{|f(x) - f(a)|, |g(y) - g(b)|\} < \varepsilon$$

con lo que h es continua.

b) *(10 puntos)* Demuestre que un espacio métrico (X, d) es conexo si, y sólo si, toda aplicación continua de X en el espacio $\{0, 1\}$ con la distancia discreta, es constante.

Solución: Si X es conexo y $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ es continua entonces $f(X)$ debe ser conexo y como $\{0, 1\}$ con la distancia discreta es no conexo, se tiene que $f(X)$ debe ser constante, o bien 0, o bien 1. Recíprocamente, supongamos que se cumple que toda aplicación continua de X en $\{0, 1\}$ es constate y supongamos que X es no conexo, entonces podemos poner $X = A \cup B$, unión de conjuntos separados, ambos abiertos. Definimos la función $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in A \\ 1 & \text{si} \quad x \in B. \end{cases}$$

f es continua puesto que la anti-imagen de cualquier abierto es abierto, a saber, $f^{-1}(\{0\}) = A$, $f^{-1}(\{1\}) = B$ y $f^{-1}(\{0, 1\}) = X$, en contra de que todas las aplicaciones continuas de x en $\{0, 1\}$ son constantes.

$\boxed{4}$ Sea (X, d) un espacio métrico. Demuestre:

a) *(6 puntos)* (T) Toda sucesión convergente es de Cauchy. ¿Es cierto el recíproco?

Solución: Véase la Proposición 5.1.4 y el Ejemplo Ej.5.4.

b) Sea $(x_n)_n \subset X$ una sucesión; para cada $n \in \mathbb{N}$ sea el conjunto $A_n = \{x_m : m \geq n\}$. Demuestre:

1) *(7 puntos)* Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, entonces $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$.

Solución: Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dado $\varepsilon > 0$, existe n_0, tal que si $n > n_0$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$ es decir, si $n > n_0$ entonces $A_n \subset B(x, \varepsilon)$ y como $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, se tiene $A_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$

2) *(7 puntos)* $(x_n)_n$ es de Cauchy si, y sólo si, $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{\delta(A_n)\} = 0$, donde $\delta(A_n)$ es el diámetro del conjunto A_n. (Recuerde $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$).

Solución: Supongamos que $(x_n)_n$ es de Cauchy; entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $m, n > n_0$ implica que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$; es decir $\delta(A_{n_0}) < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$ y también es $\delta(A_n) < \varepsilon$ para todo $n > n_0$; en definitiva sólo quedan, una cantidad finita, a lo sumo $n_0 - 1$, de los A_n cuyo diámetro puede no ser cero; y entonces $\inf_{n\in\mathbb{N}}\{\delta(A_n)\} = 0$.

$\boxed{5}$ *a)* *(10 puntos)* (T) Demuestre que todo conjunto compacto es cerrado y acotado.

Solución: Véase el teorema 4.2.5.

b) *(10 puntos)* Demuestre que un espacio métrico es compacto si, y sólo si, toda familia de cerrados disjuntos posee una subfamilia finita también disjunta.

Solución: Se trata del problema P.4.15. Supongamos que $\{F_i\}_{i\in I}$ es una familia de cerrados disjuntos en un espacio compacto X, tales que $\cap_{i\in I} F_i = \varnothing$, entonces tomando complementarios,

$\cup_{i\in I} F_i^c = X$; como cada F_i^c es abierto y X es compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito, es decir existen una cantidad finita de estos conjuntos tales que $F_1^c \cup \cdots \cup F_n^c = X$; si ahora tomamos complementarios de nuevo tenemos que $F_1 \cap \cdots \cap F_n = \varnothing$; en definitiva la subfamilia finita disjunta que buscábamos.

Recíprocamente, para ver que el el espacio X es compacto, supongamos que $\{A_i\}_{i\in I}$, es un recubrimiento abierto de X, es decir $\cup_{i\in I} A_i = X$; si tomamos complementarios, $\cap_{i\in I} A_i^c = \varnothing$, tenemos una familia de cerrados cuya intersección es vacía; por hipótesis, esta familia de cerrados tiene una subfamilia finita disjunta, es decir, existe $A_1^c, \ldots A_n^c$ tales que $A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c = \varnothing$; tomamos complementarios y obtenemos $A_1 \cup \cdots \cup A_n = X$, lo que constituye un subrecubrimiento finito de la familia de abiertos de partida; por tanto X es compacto.