Examen final

Justifique adecuadamente sus respuestas.

$\boxed{1}$ *a)* *(10 puntos)* Demuestre que (X,d) es un espacio métrico conexo si, y sólo si, todo subconjunto $A \subset X$ no vacío, $A \neq X$, cumple que $\operatorname{Fr} A \neq \varnothing$.

b) *(10 puntos)* (T) Demuestre que la unión de conjuntos conexos que tienen un punto en común es conexo.

$\boxed{2}$ Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia estrictamente decreciente ($K_n \supset K_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$) de subconjuntos compactos no vacíos en un espacio métrico (X,d).

a) *(10 puntos)* Demuestre que $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es no vacío.

b) *(10 puntos)* Demuestre que para todo abierto $A \subset X$ tal que $K \subset A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \subset A$.

$\boxed{3}$ Sean en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos $A = \{(1/n, y) : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\}$, $B = \{(0,y) : 0 \leq y \leq 1\}$ y $C = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$. Considere ahora el conjunto $M = A \cup B \cup C$.

a) *(4 puntos)* Haga una representación gráfica aproximada de M.

b) *(4 puntos)* ¿Es M abierto?

c) *(4 puntos)* ¿Es M cerrado?

d) *(4 puntos)* ¿Es M compacto?

e) *(4 puntos)* ¿Es M conexo?

$\boxed{4}$ *a)* *(10 puntos)* (T) Demuestre que si (X,d) es un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy que contiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente a un punto $x \in X$, entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

b) *(10 puntos)* (T) Demuestre que todo espacio métrico compacto es completo.

$\boxed{5}$ *(20 puntos)* Demuestre que si (X,d) e (Y,d') son dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación, son equivalentes:

a) f es continua en X.

b) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ para todo $B \subset Y$.

c) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para todo $A \subset X$.