Examen final

Justifique adecuadamente sus respuestas.

1 a) *(10 puntos)* Demuestre que (X,d) es un espacio métrico conexo si, y sólo si, todo subconjunto $A \subset X$ no vacío, $A \neq X$, cumple que $\operatorname{Fr} A \neq \varnothing$.

Solución: Supongamos que X es conexo y que $\operatorname{Fr} A = \varnothing$, esto significa que si $x \in A$, entonces, para algún $r > 0$, $B(x,r) \cap (X - A) = \varnothing$ y por tanto $x \in \mathring{A}$; es decir, A es abierto. Por otra parte, como $\operatorname{Fr} A = \overline{A} - \mathring{A}$, A también es cerrado, en contra de que en un espacio conexo los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son el vacío y el propio espacio. Luego $\operatorname{Fr} A$ debe ser no vacío.
Recíprocamente, supongamos ahora que X es conexo, y $A \subset X$; sabemos que $\operatorname{Fr} A = \overline{M} \cap \overline{X - A}$ y este conjunto debe ser vacío por hipótesis, pero entonces tendríamos que $X = \overline{M} \cup \overline{X - A}$ y X sería unión de dos conjuntos cerrados y disjuntos, en contra de que X es conexo.

b) *(10 puntos)* (T) Demuestre que la unión de conjuntos conexos que tienen un punto en común es conexo.

Solución: Se trata del Teorema 6.2.8.

2 Sea $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia estrictamente decreciente ($K_n \supset K_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$) de subconjuntos compactos no vacíos en un espacio métrico (X,d).

a) *(10 puntos)* Demuestre que $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es no vacío.

Solución: Como la familia de compactos es estrictamente decreciente, para cualquier subfamilia finita se cumple que la su intersección es el conjunto de la subfamilia cuyo subíndice es mayor (el conjunto más pequeño); por tanto cumple la propiedad de la intersección finita, lo que significa que, como son cerrados por ser compactos, la intersección $K = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ es no vacía (véase la proposición 4.8.2).

b) *(10 puntos)* Demuestre que para todo abierto $A \subset X$ tal que $K \subset A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $K_n \subset A$.

Solución: Sea A un abierto tal que $K \subset A$, sin que ninguno de los K_n esté contenido en A. Esto implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in K_n$ y $x_n \notin A$ con lo que tenemos una sucesión $(x_n)_n$ contenida en un compacto K_1, por tanto posee una subsucesión $(x_{n_k})_k$ convergente a un punto $x \in K_1$. Es decir, para cada $\varepsilon > 0$, existe k_0 tal que si $n_k > k_\varepsilon$, $x_{n-k} \in B(x,\varepsilon)$ es decir $B(x,\varepsilon) \cap K_{n_k} \neq \varnothing$ lo que significa que $x \in \cap_n K_n = K \subset A$, que como es abierto contiene una bola centrada en x y radio $\varepsilon > 0$; pero esto conlleva que para cada $n_k > k_\varepsilon$, $x_{n_k} \in A$ pero ningún término de la sucesión estaba en A.

3 Sean en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos $A = \{(1/n, y) : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\}$, $B = \{(0,y) : 0 \leq y \leq 1\}$ y $C = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$. Considere ahora el conjunto $M = A \cup B \cup C$.

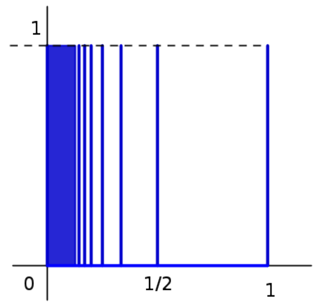
a) *(4 puntos)* Haga una representación gráfica aproximada de M.

b) *(4 puntos)* ¿Es M abierto?

Solución: No, pues para todo $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ con $1/n < \varepsilon$ y el punto $(1 - 1/n, 1/n)$ no es de A y está en la bola $B((1,1/n),\varepsilon)$, ya que $d((1-1/n,1/n),(1,1/n)) = 1/n < \varepsilon$.

c) *(4 puntos)* ¿Es M cerrado?

Solución: Sí. Veamos que el complementario es abierto. Si tomamos un punto $(a,b) \notin D$ y $a > 1$, basta tomar la bola $B((a,b), a-1)$. Esta bola no tiene puntos en común con A, pues la



primera coordenada de todos sus puntos es mayor que 1. Análogamente $a < 0$, $b < 0$ o $b > 0$. Si $a, b \in (0, 1)$, pero $(a, b) \notin D$, entonces para algún n, $1/(n+1) < a < 1/n$ y tomamos $\varepsilon = \min\{a - 1/(n+1), 1/n - a, b\}$. Entonces la bola $B((a, b), \varepsilon)$ no tiene puntos en común con A. Esto implica que $\mathbb{R}^2 - A$ es abierto.

d) *(4 puntos)* ¿Es M compacto?

Solución: Sí, pues es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ cerrado por el apartado anterior y acotado pues lo podemos incluir en la bola $B((0, 0), 2)$.

e) *(4 puntos)* ¿Es M conexo?

Solución: Sí, pues es unión de conjuntos conexos (cada segmento) no separados.

$\boxed{4}$ *a*) *(10 puntos)* (T) Demuestre que si (X, d) es un espacio métrico y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy que contiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente a un punto $x \in X$, entonces la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a x.

Solución: Se trata de la Proposición 5.1.5.

b) *(10 puntos)* (T) Demuestre que todo espacio métrico compacto es completo.

Solución: Se trata de la Proposición 5.3.1.

$\boxed{5}$ *(20 puntos)* Demuestre que si (X, d) e (Y, d') son dos espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación, son equivalentes:

a) f es continua en X.

b) $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ para todo $B \subset Y$.

c) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para todo $A \subset X$.

Solución: "(a)⇒(b)". Sea $B \subset Y$. Como $\overline{B}$ cerrado en Y, entonces por ser f continua, $f^{-1}(\overline{B})$ es cerrado en X; por otra parte $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B})$, pero $\overline{f^{-1}(B)}$ es el menor cerrado que contiene a $f^{-1}(B)$, luego $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.
"(b)⇒(c)". Sea $A \subset X$. Entonces si $B = f(A)$, tenemos $A \subset f^{-1}(B)$ y $\overline{A} \subset \overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$. Entonces $f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{B})) = \overline{B} = \overline{f(A)}$.
"(b)⇒(c)". Sea F un cerrado en Y y $F_1 = f^{-1}(F)$. Veamos que F_1 es cerrado en X y habremos probado que f es continua. En efecto, tenemos

$$f(\overline{F_1}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$$

y, por tanto

$$\overline{F_1} \subset f^{-1}(f(\overline{F_1})) \subset f^{-1}(F) = F_1.$$