



### Examen final

Justifique adecuadamente sus respuestas.

- 1) a) (3 puntos) Escriba la definición de conjunto abierto.  
 b) (5 puntos) Demuestre que la unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.  
 c) (5 puntos) ¿La intersección de conjuntos abiertos es abierto? ¿Puede ser un cerrado la intersección de conjuntos abiertos?  
 d) (7 puntos) Demuestre que un conjunto  $A$  es abierto si, y sólo si,  $A \cap \text{Fr } A = \emptyset$ .
- 2) Si  $(X, d)$  es un espacio métrico y  $x \in X$ , se llama componente conexa de  $x$  al conjunto  $C(x)$  formado por la unión de todos los subconjuntos conexos de  $X$  que contienen al punto  $x$ .
- a) (6 puntos) Demuestre que  $C(x)$  es conexo y que es el mayor conexo que contiene a  $x$ .  
 b) (8 puntos) Demuestre que si  $x, y \in X$ , entonces  $C(x)$  y  $C(y)$  o bien coinciden, o bien son disjuntos.  
 c) (6 puntos) Considere un espacio discreto. Estudie cómo es la componente conexa de un punto.

- 3) Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  dos espacios métricos:

- a) (6 puntos) Demuestre que el conjunto  $X \times Y$  con la aplicación

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\},$$

es un espacio métrico.

- b) (7 puntos) Demuestre que una sucesión  $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$  en  $(X \times Y, \rho)$  es de Cauchy si, y sólo si, las sucesiones  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  e  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  son de Cauchy en  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  respectivamente.  
 c) (7 puntos) Demuestre que  $(X \times Y, \rho)$  es completo si, y sólo si,  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  son completos.
- 4) a) (10 puntos) Demuestre que la imagen de un conjunto compacto mediante una aplicación continua, es un conjunto compacto.  
 b) (10 puntos) Demuestre que la aplicación  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ambos espacios con la distancia usual), definida como  $f(x) = ax$  ( $a \neq 0$ ), es uniformemente continua. ¿Qué ocurre con  $f$  si el espacio de llegada es  $\mathbb{R}$  con la distancia discreta?, ¿es continua?, ¿es uniformemente continua?

- 5) Considere el conjunto de  $\mathbb{R}^2$

$$A = \left\{ (x, y) : x = \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1 \right\} \cup \{(1, y) : 0 \leq y \leq 1\}$$

- a) (2 puntos) Realice una representación gráfica aproximada.  
 b) (4 puntos) ¿Es abierto?  
 c) (4 puntos) ¿Es cerrado?  
 d) (3 puntos) ¿Cuál es su interior?  
 e) (3 puntos) ¿Cuál es su frontera?  
 f) (4 puntos) ¿Es compacto?