Examen final

Justifique adecuadamente sus respuestas.

$\boxed{1}$ *a)* *(3 puntos)* Escriba la defininción de conjunto abierto.

Solución: Véase la Definición 1.3.2.

b) *(5 puntos)* Demuestre que la unión de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.

Solución: Véase el Teorema 1.3.6.

c) *(5 puntos)* ¿La intersección de conjuntos abiertos es abierto? ¿Puede ser un cerrado la intersección de conjuntos abiertos?

Solución: Véase el Teorema 1.3.6 y el Ejemplo Ej.1.30.

d) *(7 puntos)* Demuestre que un conjunto A es abierto si, y sólo si, $A \cap \operatorname{Fr} A = \varnothing$.

Solución: Supongamos que A es abierto y que $x \in A$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$, con lo que dicha bola no tiene puntos del complementario de A y por tanto $x \notin \operatorname{Fr} A$, lo que significa que $A \cap \operatorname{Fr} A = \varnothing$. Recíprocamente, si $A \cap \operatorname{Fr} A = \varnothing$ y $x \in A$, entonces, como $x \notin \operatorname{Fr} A$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A^c = \varnothing$, es decir $B(x, r) \subset A$ y x es interior a A, como esto es para todo $x \in A$, A es abierto.

$\boxed{2}$ Si (X, d) es un espacio métrico y $x \in X$, se llama componente conexa de x al conjunto $C(x)$ formado por la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen al punto x.

a) *(6 puntos)* Demuestre que $C(x)$ es conexo y que es el mayor conexo que contiene a x.

b) *(8 puntos)* Demuestre que si $x, y \in X$, entonces $C(x)$ y $C(y)$ o bien coinciden, o bien son disjuntos.

Solución: Véase el Teorema 6.5.5.

c) *(6 puntos)* Considere un espacio discreto. Estudie cómo es la componente conexa de un punto.

Solución: Se trata del propio punto puesto que es abierto y cerrado.

$\boxed{3}$ Sean (X, d) e (Y, d') dos espacios métricos:

a) *(6 puntos)* Demuestre que el conjunto $X \times Y$ con la aplicación

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\},$$

es un espacio métrico.

Solución: La prueba es similar a la que se hace en el Ejemplo Ej.1.4.

b) *(7 puntos)* Demuestre que una sucesión $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $(X \times Y, \rho)$ es de Cauchy si, y sólo si, las sucesiones $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ son de Cauchy en (X, d) e (Y, d') respectivamente.

Solución: Supongamos que $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que si $m, n > n_0$ entonces $\max\{d(x_n, x_m), d'(y_n, y_m)\} < \varepsilon$, que al ser un máximo implica que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ y $d'(y_n, y_m) < \varepsilon$; es decir ambas sucesiones son de Cauchy.

Recíprocamente, si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en X, se cumple que para cada $\varepsilon > 0$, existe n_1 tal que si $m, n > n_1$ entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ y si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en Y, existe n_2 tal que si $m, n > n_2$ entonces $d'(y_m, y_n) < \varepsilon$; si tomamos $m, n > \max\{n_1, n_2\}$ se verifican las dos afirmaciones a la vez y por tanto $\rho((x_n, y_n), (x_m, y_m)) = \max\{d(x_n, x_m), d'(y_n, y_m)\} < \varepsilon$ y la sucesión $(x_n, y_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

c) *(7 puntos)* Demuestre que $(X \times Y, \rho)$ es completo si, y sólo si, (X, d) e (Y, d') son completos.

Solución: Supongamos que $X \times Y$ es completo y sean $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ sucesiones de Cauchy en X e Y respectivamente, entonces por el apartado anterior, la sucesión $(x_n, y_n)_n$ es de Cauchy en $X \times Y$ y por tanto convergente a un punto $(x, y) \in X \times Y$, es decir, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$, entonces $\max\{d(x_n, x), d'(y_n, y)\} < \varepsilon$, lo que implica, al ser un máximo, que $d(x_n, x) < \varepsilon$ y $d(y_n, y) < \varepsilon$, es decir $(x_n)_n$ converge a x e $(y_n)_n$ lo hace a y. Esto último implica la completitud de X e Y. El recíproco es similar.

$\boxed{4}$ *a*) *(10 puntos)* Demuestre que la imagen de un conjunto compacto mediante una aplicación continua, es un conjunto compacto.

Solución: Se trata del Teorema 4.3.1.

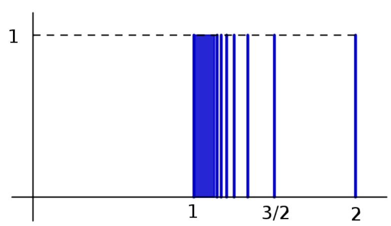
b) *(10 puntos)* Demuestre que la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (ambos espacios con la distancia usual), definida como $f(x) = ax$ $(a \neq 0)$, es uniformemente continua. ¿Qué ocurre con f si el espacio de llegada es $\mathbb{R}$ con la distancia discreta?, ¿es continua?, ¿es uniformemente continua?

Solución: Veamos que es uniformemente continua. Tenemos que $|f(x) - f(y)| = |ax - ay| = |a||x - y|$; por tanto, dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $\delta = \varepsilon/|a|$, si $1x - y| < \delta = \varepsilon/|a|$, se cumple $|f(x) - f(y)| = |a||x - y| < |a|(\varepsilon/|a|) = \varepsilon$ con lo que la función es uniformemente continua.
Si el espacio de llegada es $\mathbb{R}$ con la distancia discreta, no es continua pues la antiimagen del abierto $\{1\}$ es $f^{-1}(\{1\}) = \{1/a\}$ que no es abierto en $\mathbb{R}$ con la distancia usual. Como no es continua no puede ser uniformemente continua.

$\boxed{5}$ Considere el conjunto de $\mathbb{R}^2$

$$A = \left\{(x, y) : x = \frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\right\} \cup \{(1, y) : 0 \leq y \leq 1\}$$

a) *(2 puntos)* Realice una representación gráfica aproximada.



b) *(4 puntos)* ¿Es abierto?

Solución: No, Cualquier bola centrada en el punto $(2, 0)$ contiene puntos que no son de A, con lo que este punto no es interior y A no es abierto.

c) *(4 puntos)* ¿Es cerrado?

Solución: Sí, veamos que el complementario es abierto. Si tomamos un punto $(a, b) \notin D$ y $a > 2$, basta tomar la bola $B((a, b), a - 2)$. Esta bola no tiene puntos en común con A, pues la primera coordenada de todos sus puntos es mayor que 2. Análogamente $a < 1$, $b < 0$ o $b > 0$. Si $a \in (1, 2)$ y $b \in (0, 1)$, pero $(a, b) \notin D$, entonces para algún n, $(n+2)/(n+1) < a < (n+1)/n$ y tomamos $\varepsilon = \min\{a - (n+2)/(n+1), (n+1)/n - a, b\}$. Entonces la bola $B((a, b), \varepsilon)$ no tiene puntos en común con A. Esto implica que $\mathbb{R}^2 - A$ es abierto.

d) *(3 puntos)* ¿Cuál es su interior?

Solución: Su interior es vacío pues para cualquier punto la bola $B((n+)/n, y), \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$ contiene puntos que no es tán en A.

e) *(3 puntos)* ¿Cuál es su frontera?

Solución: Como $\operatorname{Fr} A = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$, segun los apartados anteriores $\operatorname{Fr} A = A$.

f) *(4 puntos)* ¿Es compacto?

Solución: Sí, es cerrado y acotado pues está incluido en $B((1,0),2)$.