Capítulo 1

Variedades diferenciables y subvariedades

CONTENIDOS. Superficies k-dimensionales en $\mathbb{R}^n$. Atlas diferenciable sobre una variedad topológica. Estructura diferenciable. Definición de variedad diferenciable. Ejemplos. La variedad diferenciable producto. La topología inducida. Estructura diferenciable sobre un espacio topológico. Propiedades de la topología inducida. Variedades Hausdorff y segundo axioma de numerabilidad. Variedades paracompactas. Funciones diferenciables. Definición de aplicación diferenciable. Difeomorfismos y difeomorfismos locales. Variedades difeomorfas. Vectores en $\mathbb{R}^n$ como derivadas direccionales. Definición de vector tangente. Espacio tangente. Covectores y espacio cotangente. La diferencial de una aplicación diferenciable. Matriz jacobiana y rango de una aplicación diferenciable. La regla de la cadena. El teorema de la función inversa. Los fibrados tangente y cotangente. Inmersiones. Propiedades de las inmersiones. Embebimiento. Subvariedad. Sistemas de coordenadas adaptados. El teorema de la función implícita. Ejemplos. El teorema de Whitney.

1.1. Superficies k-dimensionales en $\mathbb{R}^n$

De un modo intuitivo, una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ puede construirse considerando trozos de plano y deformándolos. Posteriormente estos trozos se van entrelazando de tal forma que no aparezcan vértices, bordes o aristas, esto es, de manera que exista una cierta suavidad en las uniones. Si recordamos la definición de superficie notaremos que nada impide considerar que el espacio ambiente es $\mathbb{R}^n$ en lugar de $\mathbb{R}^3$, o que nuestras superficies son localmente homeomorfas a abiertos de $\mathbb{R}^k$ en lugar de $\mathbb{R}^2$.

Comenzaremos esta aproximación a las variedades diferenciables introduciendo los conceptos de curvas y superficies en el espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$, para liberar a estos conceptos del lastre que supone considerarlos en el siempre cómodo espacio $\mathbb{R}^3$.

Definición 1.1 (Curva parametrizada regular en $\mathbb{R}^n$)
Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo abierto. Una *curva parametrizada* en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase $\mathscr{C}^\infty$. La curva γ se dice que es *regular* si $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Es posible presentar una definición más general de curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$, donde se exige sólo que γ sea continua, mientras que para curvas regulares se impone únicamente que sea de clase $\mathscr{C}^1$. Sin embargo, para nuestros propósitos (y salvo mención expresa de lo contrario) sólo consideraremos curvas de clase $\mathscr{C}^\infty$.

Ejemplos

- *Línea recta*. Sean $p, v \in \mathbb{R}^n$. La recta que pasa por p en la dirección de v se expresa como $\gamma(t) = p + tv$, $t \in \mathbb{R}$. La curva es regular si, y sólo si, $v \neq 0$.
- *Circunferencia*. Sean $p = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ y $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. La circunferencia de radio r centrada en el punto p se parametriza como $\gamma(t) = (a + r\cos t, b + r\,\mathrm{sen}\, t)$. γ es una curva regular en todos los puntos.
- *Hélice*. Sean $r, h \in \mathbb{R}$ dos números reales no nulos. La hélice de radio r y altura (paso) h puede parametrizarse mediante $\gamma(t) = (r\cos 2\pi t, r\,\mathrm{sen}\, 2\pi t, ht)$. Como antes, γ es una curva regular en todos los puntos.
- *Parametrización genérica de una recta*. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función biyectiva y diferenciable. Entonces la recta determinada por (p, v), $v \neq 0$, puede expresarse como $\gamma(t) = p + f(t)v$. En consecuencia, γ es regular en los puntos t donde $f'(t) \neq 0$.

Definición 1.2 (Superficie regular en $\mathbb{R}^n$)
Una *superficie (diferenciable) regular* en $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo punto de S existe un entorno V del punto en S (con la topología relativa) y una aplicación $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V$, U abierto, satisfaciendo las siguientes propiedades:
(1) X es un homeomorfismo.
(2) $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es diferenciable.
(3) dX tiene rango 2 en todos los puntos de U.

Como vemos por la definición dada, que formalmente es idéntica a la correspondiente para superficies del espacio euclídeo tridimensional, la única diferencia consiste en la ampliación del espacio donde “vive” la superficie. Esto pone de manifiesto que la restricción sobre la *dimensión* del espacio ambiente era más bien una consecuencia histórica. En este sentido, cuando digamos que S es una superficie de $\mathbb{R}^n$ debe entenderse que S no es un subconjunto de ningún espacio $\mathbb{R}^m$, $m < n$.

Ejemplos

- *Toro*. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, a y b positivos. Entonces el producto de dos circunferencias de radios a y b, $\mathbb{S}^1(a) \times \mathbb{S}^1(b)$, es una superficie en $\mathbb{R}^4$.
- *Producto de curvas*. En general, sean $\gamma_1(t)$ y $\gamma_2(s)$ dos curvas regulares en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, respectivamente. Entonces el producto $\gamma_1 \times \gamma_2$ es una superficie en $\mathbb{R}^{n+m}$.

No es difícil encontrar subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que gozan de propiedades similares a las curvas y superficies pero que, sin embargo, no son ni lo uno ni lo otro. Esto nos lleva necesariamente a la introducción de un nuevo concepto.

Definición 1.3 (Superficie k-dimensional parametrizada en $\mathbb{R}^n$)
Sea $A \subset \mathbb{R}^k$ un subconjunto abierto. Una *superficie k-dimensional parametrizada* en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $X : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable de clase $\mathscr{C}^\infty$. Diremos que la superficie es *regular* si dX tiene rango k en todos los puntos de A.

Sin embargo, y tal como ocurría con las curvas y superficies 2-dimensionales, el nuevo concepto es insuficiente ya que no permite obtener subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ que a todas luces gozan de *buenas propiedades*, como son, por ejemplo, las esferas. Por ello conviene introducir una noción que generalice adecuadamente la de superficie.

Definición 1.4 (Superficie k-dimensional en $\mathbb{R}^n$)
Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es una *superficie k-dimensional* (diferenciable y regular) si para todo punto p de S existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^k$, un entorno $V \subset S$ de p (con la topología relativa) y una aplicación $X : U \to V$

satisfaciendo las siguientes tres propiedades:
(1) X es un homeomorfismo.
(2) $X = (x_1, \dots, x_n) : U \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación diferenciable.
(3) La diferencial $dX_q : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es inyectiva para todo $q \in U$.

La aplicación X se dice que es una parametrización de la superficie S, y las funciones $(x_1, \dots, x_n)$ se denominan las funciones coordenadas asociadas a la parametrización X; V se denomina entorno de coordenadas.

Un mismo punto de S puede pertenecer a distintos entornos de coordenadas y puesto que la geometría de S depende de la aplicación X, sería adecuado y conveniente que las propiedades geométricas en un punto p fuesen independientes de la parametrización. Este problema se soluciona con el siguiente resultado, cuya demostración es totalmente análoga al caso de superficies en $\mathbb{R}^3$.

Proposición 1.5 (Aplicación cambio de parámetros)
Sea p un punto de una superficie k-dimensional (diferenciable y regular) en $\mathbb{R}^n$, y sean $X : U \to S$ e $Y : V \to S$ dos parametrizaciones de S tales que $p \in X(U) \cap Y(V) = W$. Entonces la aplicación $h = X^{-1} \circ Y : Y^{-1}(W) \to X^{-1}(W)$ es un difeomorfismo. h se denomina la aplicación cambio de parámetros.

La propiedad que acabamos de enunciar nos dice que la transición entre dos parametrizaciones se hace de manera diferenciable, de tal suerte que si nos moviésemos por la superficie no nos daríamos cuenta del paso de una a otra. Esta propiedad será fundamental para comprender el concepto de variedad diferenciable.

No es excesivamente difícil probar que el grafo de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ es una superficie k-dimensional (la demostración es totalmente análoga al caso del grafo de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, por lo que enunciamos el resultado sin demostración). Por otra parte, puede probarse que toda superficie k-dimensional diferenciable S es, localmente, el grafo de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ (como antes, la demostración es totalmente análoga al caso del grafo de una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$). Esta propiedad nos permite diseñar un método práctico y sencillo para obtener ejemplos de superficies k-dimensionales.

Proposición 1.6
Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ una aplicación diferenciable y sea $a \in \mathbb{R}^{n-k}$ un valor regular de f, es decir, df_q tiene rango $n-k$ para todo punto $q \in f^{-1}(a)$ (suponemos que $f^{-1}(a)$ no es vacío). Entonces $S = f^{-1}(a)$ es una superficie k-dimensional de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplos

- *Cilindro circular recto*: $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$, $r > 0$.
- *Paraboloide*: $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$.
- *Hiperboloide de una hoja*: $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$.
- *Hiperboloide de dos hojas*: $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0\}$.
- *Cilindro k-dimensional*: $E = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_k^2 = r^2\}$, $r > 0$.
- *Esfera k-dimensional*: $F = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{k+1}^2 = r^2\}$, $r > 0$.

1.2. Variedades diferenciables

Existen diversas formas de introducir la noción de variedad diferenciable, muchas de las cuales parten de la idea de espacio topológico o variedad topológica. Nosotros preferimos introducir las estructuras diferenciables sobre un conjunto sin ninguna otra estructura adicional, tal y como se hace, por ejemplo, en los textos de R. Brickell y R.S. Clark (*Differentiable Manifolds*, Van Nostrand, 1970) y M. Do Carmo (*Riemannian Geometry*, Birkhäuser, 1992).

Definición 1.7 (Carta)
Sea M un conjunto. Una *carta n-dimensional* sobre M es una aplicación biyectiva $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^n$ cuya imagen $V = \varphi(U)$ es un conjunto abierto del espacio euclídeo.

El conjunto U, dominio de la carta φ, se denomina *entorno coordenado*, ya que todos los puntos de U tienen asignadas, via φ, unas coordenadas. En efecto, si $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota la función proyección en la i-ésima coordenada, entonces se definen las *funciones coordenadas* asociadas a la carta (U, φ) como $x_i = p_i \circ \varphi$. Entonces, las coordenadas de un punto p en la carta φ son $(x_1(p), \ldots, x_n(p))$.

Al igual que ocurre con las superficies, hay conjuntos que no pueden cubrirse mediante una sola carta, de modo que necesitaremos colecciones de cartas entre las que exista cierta compatibilidad, en un sentido que pasamos a precisar.

Definición 1.8 (Cartas compatibles)
Dos cartas n-dimensionales (U, φ) y (V, ψ) sobre un conjunto M son *compatibles* si $U \cap V = \varnothing$ o bien $U \cap V \neq \varnothing$, los conjuntos $\varphi(U \cap V)$ y $\psi(U \cap V)$ son abiertos en $\mathbb{R}^n$ y las aplicaciones $\psi \circ \varphi^{-1}$ y $\varphi \circ \psi^{-1}$ son difeomorfismos (de clase $\mathscr{C}^\infty$).

Ahora estamos en condiciones de definir uno de los conceptos fundamentales de este capítulo.

Definición 1.9 (Estructura diferenciable)
Un *atlas diferenciable n-dimensional* sobre un conjunto M es una familia de cartas $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ satisfaciendo las siguientes condiciones:
(1) $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$.
(2) Para todo par de índices α y β, las cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son compatibles.
Diremos que el atlas $\mathscr{A}$ determina una *estructura diferenciable* sobre M si es maximal para las condiciones anteriores.

Observación
Aunque en un principio pueden considerarse atlas de clase $\mathscr{C}^k$, es decir, de manera que los cambios de cartas sean aplicaciones diferenciables de clase $\mathscr{C}^k$, para nuestros propósitos es suficiente trabajar con atlas de clase $\mathscr{C}^\infty$.

La condición de maximalidad que aparece en la definición anterior es puramente técnica y podría eliminarse, ya que es fácil demostrar el siguiente resultado.

Proposición 1.10
Cualquier atlas diferenciable sobre un conjunto M se puede completar a un atlas maximal de manera única, es decir, todo atlas diferenciable sobre un conjunto está contenido en exactamente un atlas maximal.

Así pues, para definir una estructura diferenciable no necesitamos especificar un atlas maximal sobre M, sino simplemente un atlas diferenciable. Como sobre un mismo conjunto es posible definir diferentes atlas, ¿cómo saber si dos atlas diferenciables son *equivalentes*, es decir, determinan la misma estructura diferenciable (atlas maximal)? Utilizando la compatibilidad de las cartas es fácil probar lo siguiente.

Proposición 1.11
Sean $\mathscr{A}_1$ y $\mathscr{A}_2$ dos atlas diferenciables sobre un conjunto M. Los atlas son equivalentes si, y sólo si, $\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$ constituye un atlas.

El resultado anterior equivale a ver que toda carta del primer atlas es compatible con cualquier carta del segundo atlas. Llegamos ahora al concepto central del capítulo.

Definición 1.12 (Variedad diferenciable)
Una *variedad diferenciable* de dimensión n es un par $(M,\mathscr{A})$ formado por un conjunto M y una estructura diferenciable $\mathscr{A}$ sobre M.

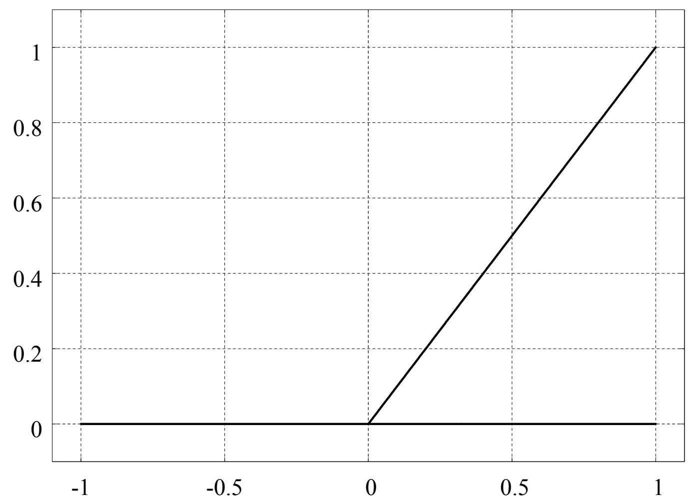
Para indicar la dimensión n, en algunas ocasiones escribiremos M^n en lugar de M, y cuando la estructura diferenciable sea conocida omitiremos cualquier referencia a ella.

Ejemplos

- En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ podemos definir una estructura diferenciable considerando como carta global la aplicación identidad. Nos referiremos a ella como la estructura diferenciable estándar de $\mathbb{R}^n$.
- Consideremos la aplicación diferenciable $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(s) = s^3$. Entonces φ proporciona una estructura diferenciable sobre $\mathbb{R}$ distinta de la estructura estándar. Ello es debido a que la aplicación $\varphi^{-1}(s) = \sqrt[3]{s}$ no es diferenciable en todo $\mathbb{R}$.
- Si $\mathbb{C}$ denota el cuerpo de los números complejos, entonces $\mathbb{C}^n$ admite estructura de variedad diferenciable. Para comprobarlo basta considerar la carta global $(\mathbb{C}^n,\varphi)$, donde la aplicación $\varphi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ está definida por
$$\varphi(a_1+ib_1,\ldots,a_n+ib_n) = (a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n).$$

Ejemplos de variedades diferenciables

Ejemplo (La figura Y)
Sea el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ definido por $Y = \{(s,0) \mid -1 < s < 1\} \cup \{(s,s) \mid 0 < s < 1\}$:



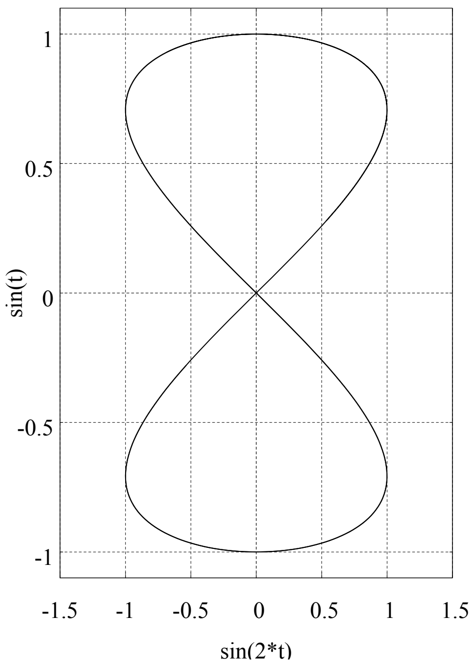
y consideremos las aplicaciones

$$x : U = \{(s,0) \mid -1 < s < 1\} \to \mathbb{R}, \qquad x(s,0) = s$$

$$y : V = \{(s,0) \mid -1 < s \leq 0\} \cup \{(s,s) \mid 0 < s < 1\} \to \mathbb{R}, \qquad y(s,0) = s,\ y(s,s) = s$$

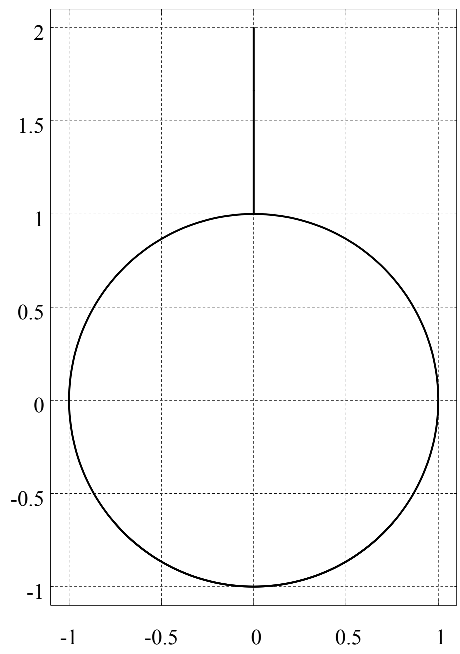
Entonces $\{(U,x),(V,y)\}$ no determinan una estructura de variedad diferenciable sobre Y. La razón hay que buscarla en que $x(U\cap V) = y(U\cap V) = (-1,0]$ no es un abierto de $\mathbb{R}$.

Ejemplo (La figura ocho)
Sea el conjunto $E = \{(\mathrm{sen}(2s), \mathrm{sen}(s)) \mid s \in \mathbb{R}\}$, denominado *figura ocho*.



Entonces las aplicaciones $y : V = \{(\mathrm{sen}(2s), \mathrm{sen}(s)) \mid s \in (0, 2\pi)\} \to \mathbb{R}$ y $x : U = \{(\mathrm{sen}(2s), \mathrm{sen}(s)) \mid s \in (-\pi, \pi)\} \to \mathbb{R}$, que a cada punto le asigna el valor del parámetro s, definen un atlas sobre la figura ocho. ¿Son equivalentes las estructuras diferenciables?

Ejemplo (El lazo)
El subconjunto $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < y < 2\}$ se denomina *lazo*.



Consideremos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{ccll} x:N & \to & \mathbb{R} & \\ (0,s) & \to & 1-s, & 1<s<2 \\ (\operatorname{sen}2\pi s, \cos 2\pi s) & \to & s, & 0\leq s<1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccll} y:N & \to & \mathbb{R} & \\ (0,s) & \to & 1-s, & 1<s<2 \\ (\operatorname{sen}2\pi s, \cos 2\pi s) & \to & 1-s, & 0\leq s<1 \end{array}$$

Entonces x e y definen dos estructuras diferenciables sobre el lazo. ¿Son equivalentes estas estructuras diferenciables?

La aplicación x está definida sobre todo N y su imagen es el abierto $(-1,1)$ de $\mathbb{R}$. Por tanto, sólo es necesario verificar la inyectividad. Si $x(z_1,z_2)=x(w_1,w_2)\in(-1,0)$ entonces (z_1,z_2) y (w_1,w_2) se encuentran en $\{(0,s)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<s<2\}$ por lo que $z_1=0=w_1$. Además $x(0,z_2)=1-z_2=x(0,w_2)=1-w_2$ implica $z_2=w_2$. Si $x(z_1,z_2)=x(w_1,w_2)\in[0,1)$ entonces (z_1,z_2) y (w_1,w_2) se encuentran en $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$. Utilizando la periodicidad de las funciones trigonométricas se obtiene que $(z_1,z_2)=(w_1,w_2)$. Esto prueba que x es una carta. Para la aplicación y se razona exactamente igual.

Para ver si x e y determinan la misma estructura diferenciable sobre N, debemos estudiar la aplicación $y\circ x^{-1}$: $x(N)=(-1,1)\longrightarrow y(N)=(-1,1)$ que está definida como sigue:

$$y\circ x^{-1}(s)=\begin{cases} s & \text{si } -1<s<0 \\ 0 & \text{si } s=0 \\ 1-s & \text{si } 0<s<1 \end{cases}$$

Es fácil ver que dicha aplicación no es continua en $s=0$ y, en consecuencia, las estructuras diferenciables determinadas por las aplicaciones x e y son distintas.

Ejemplo (El espacio de las matrices)

Sea $\mathscr{M}(m\times n,\mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices reales de orden $m\times n$. Entonces $\mathscr{M}(m\times n,\mathbb{R})$ admite estructura de variedad diferenciable. En efecto, si $A\in\mathscr{M}(m\times n,\mathbb{R})$ podemos escribir

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Entonces definimos la aplicación $\varphi:\mathscr{M}(m\times n,\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}^{mn}$ por

$$\varphi(A)=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n},a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n},\ldots,a_{m1},a_{m2},\ldots,a_{mn}).$$

Es fácil comprobar que φ constituye una carta global sobre $\mathscr{M}(m\times n,\mathbb{R})$. Ésta será la estructura diferenciable estándar sobre el espacio de las matrices $\mathscr{M}(m\times n,\mathbb{R})$.

Ejemplo (Un espacio vectorial)

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n. Fijada una base $\{e_1,\ldots,e_n\}$, la aplicación

$$x:V\to\mathbb{R}^n, \qquad x\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right)=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$$

determina una estructura de variedad diferenciable sobre V. Además, cualquier otra base da origen a la misma estructura diferenciable.
La inyectividad de x es consecuencia de la propiedad según la cual la expresión de un vector en una base es única. Por otro lado, la sobreyectividad es consecuencia de que toda base es un sistema generador del espacio vectorial.
Consideremos ahora $y : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ otra carta global asociada a otra base $\{f_1,\dots,f_n\}$. Entonces el cambio de cartas $x\circ y^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación lineal cuya matriz asociada es la matriz del cambio de base. En consecuencia, $x\circ y^{-1}$ es diferenciable (al igual que $y\circ x^{-1}$) lo que implica que x e y determinan la misma estructura de variedad diferenciable sobre V.

Proposición 1.13 (La variedad producto)
Sean M y M' dos variedades diferenciables de dimensiones n y n', respectivamente. Entonces el producto cartesiano $M\times M'$ admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión $n+n'$.

En efecto, sean $\{(U_\alpha,x_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ y $\{(V_\beta,y_\beta)\}_{\beta\in B}$ atlas para M y M', respectivamente. En el producto cartesiano $U_\alpha\times V_\beta$, para todo α y β, definimos una aplicación $z_{\alpha\beta} : U_\alpha\times V_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^{n+n'}$ por $z_{\alpha\beta}(p,q) = (x_\alpha(p),y_\beta(q))$. Entonces, $\{(U_\alpha\times V_\beta,z_{\alpha\beta}) \mid (\alpha,\beta)\in A\times B\}$ es un atlas sobre el producto cartesiano $M\times M'$. En primer lugar, el conjunto imagen $z_{\alpha\beta}(U_\alpha\times V_\beta) = x_\alpha(U_\alpha)\times y_\beta(V_\beta)$ es abierto (por ser producto de abiertos) y la aplicación $z_{\alpha\beta}$ es biyectiva, por serlo x_α e y_β. Esto prueba que $(U_\alpha\times V_\beta,z_{\alpha\beta})$ es una carta sobre $M\times M'$. En segundo lugar, $\cup_{(\alpha,\beta)}z_{\alpha\beta}(U_\alpha\times V_\beta) = (\cup_\alpha x_\alpha(U_\alpha))\times\big(\cup_\beta y_\beta(V_\beta)\big) = M\times M'$. Para finalizar sólo resta comprobar que los cambios de cartas son diferenciables. Consideremos dos cartas $(U_\alpha\times V_\beta,z_{\alpha\beta})$ y $(U_\gamma\times V_\delta,z_{\gamma\delta})$ tales que $(U_\alpha\times V_\beta)\cap(U_\gamma\times V_\delta)\neq\varnothing$. Entonces $U_\alpha\cap U_\delta\neq\varnothing$ y $V_\beta\cap V_\gamma\neq\varnothing$, y consecuentemente $x_\alpha\circ x_\gamma^{-1}$ e $y_\beta\circ y_\delta^{-1}$ son diferenciables. Ahora sólo queda notar que $z_{\alpha\beta}\circ z_{\gamma\delta}^{-1} = (x_\alpha\circ x_\gamma^{-1})\times(y_\beta\circ y_\delta^{-1})$ para deducir que el cambio de cartas es diferenciable.

Más ejemplos de variedades diferenciables

Ejemplo (La esfera n-dimensional)
Sea $\mathbb{S}^n = \{(z_1,\dots,z_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} z_i^2 = 1\}$ la esfera unitaria n-dimensional. Consideremos las aplicaciones

$$\varphi_{kj} : U_{kj}\to\mathbb{R}^n,\quad \varphi_{kj}(z_1,\dots,z_{n+1}) = (z_1,\dots,z_{k-1},z_{k+1},\dots,z_{n+1})$$

donde $U_{kj} = \{(z_1,\dots,z_{n+1})\in\mathbb{S}^n \mid (-1)^j z_k > 0\}$, $j=0,1$ y $k=1,2,\dots,n+1$. Entonces $\big\{(U_{kj},\varphi_{kj})\big\}$ es un atlas para $\mathbb{S}^n$ (denominado *atlas de los hemisferios*).
Veamos, en primer lugar, que (U_{kj},φ_{kj}) es una carta n-dimensional para todo k y todo j. Un punto $t = (t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ está en la imagen de U_{kj} si existe un valor $t_0\in(-1,1)$ tal que $(t_1,\dots,t_{k-1},t_0,t_k,\dots,t_n)\in U_{kj}$. Entonces $t_1^2+\cdots+t_n^2 = 1-t_0^2 < 1$ por lo que t está en la bola abierta unitaria $B(0;1)\subset\mathbb{R}^n$. Además, φ_{kj} es inyectiva ya que si $\varphi_{kj}(z_1,\dots,z_{n+1}) = \varphi_{kj}(w_1,\dots,w_{n+1})$ entonces $z_i = w_i$ para todo $i\neq k$, lo que también implica que $z_k = (-1)^j(1-\sum_{i\neq k} z_i^2) = (-1)^j(1-\sum_{i\neq k} w_i^2) = w_k$.
En segundo lugar, $\cup_{k,j}U_{kj} = \mathbb{S}^n$, ya que si $z = (z_1,\dots,z_{n+1})\in\mathbb{S}^n$ entonces $z\neq 0$ por lo que tiene alguna componente $z_k\neq 0$. Si $z_k>0$ se tiene que $z\in U_{k0}$, mientras que si $z_k<0$ entonces $z\in U_{k1}$.
Finalmente, para analizar los cambios de coordenadas vamos a considerar, sin pérdida de generalidad, las cartas (U_{10},φ_{10}) y (U_{20},φ_{20}), cuya intersección es el subconjunto de la esfera $\mathbb{S}^n$ dado por $U_{10}\cap U_{20} = \{z \mid z_1>0, z_2>0\}$. El cambio de coordenadas $\varphi_{20}\circ\varphi_{10}^{-1} : \varphi_{10}(U_{10}\cap U_{20})\to\varphi_{20}(U_{10}\cap U_{20})$, donde $\varphi_{10}(U_{10}\cap U_{20}) = \varphi_{20}(U_{10}\cap U_{20})$ es el conjunto $\{(t_1,\dots,t_n)\in B(0;1) \mid t_1>0\}$, está definido por

$$\varphi_{20}\circ\varphi_{10}^{-1}(t_1,\dots,t_n) = \left(\sqrt{1-\textstyle\sum_{i=1}^n t_i^2}, t_2,\dots,t_n\right),$$

que es claramente diferenciable, ya que $\sum_{i=1}^n t_i^2 < 1$.

Ejemplo (Las proyecciones estereográficas)
En la esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n$, sean los puntos $N = (0,\ldots,0,1)$ y $S = (0,\ldots,0,-1)$ y consideremos $U = \mathbb{S}^n - \{N\}$ y $V = \mathbb{S}^n - \{S\}$. Definamos las aplicaciones

$$x : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \text{e} \qquad y : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

por

$$x_i(z_1,\ldots,z_{n+1}) = \frac{z_i}{1-z_{n+1}} \qquad \text{e} \qquad y_i(z_1,\ldots,z_{n+1}) = \frac{z_i}{1+z_{n+1}}, \qquad i = 1,\ldots,n+1.$$

Veamos que $\{(U,x),(V,y)\}$ constituye un atlas para $\mathbb{S}^n$ equivalente al de los hemisferios. Lo llamaremos el atlas estereográfico.
En primer lugar, (U,x) es una carta n-dimensional sobre la esfera. La aplicación x es inyectiva, ya que si

$$x(z_1,\ldots,z_{n+1}) = x(w_1,\ldots,w_{n+1})$$

se tiene que

$$\frac{z_i}{1-z_{n+1}} = \frac{w_i}{1-w_{n+1}}, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

de donde elevando al cuadrado y sumando obtenemos

$$\frac{1}{(1-z_{n+1})^2}\sum_{i=1}^n z_i^2 = \frac{1}{(1-w_{n+1})^2}\sum_{i=1}^n w_i^2.$$

Como los puntos z y w están sobre la esfera, $\sum_{i=1}^n z_i^2 = 1 - z_{n+1}^2$ y $\sum_{i=1}^n w_i^2 = 1 - w_{n+1}^2$, por lo que

$$\frac{1+z_{n+1}}{1-z_{n+1}} = \frac{1-z_{n+1}^2}{(1-z_{n+1})^2} = \frac{1-w_{n+1}^2}{(1-w_{n+1})^2} = \frac{1+w_{n+1}}{1-w_{n+1}},$$

de donde se deduce $z_{n+1} = w_{n+1}$ y, en consecuencia, $z_i = w_i$ para $i = 1,\ldots,n$. La aplicación x es, también, sobreyectiva sobre $\mathbb{R}^n$, ya que si $t = (t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces tomando $z = (z_1,\ldots,z_{n+1})$, donde

$$z_{n+1} = \frac{\|t\|^2-1}{\|t\|^2+1}, \qquad z_i = \frac{2t_i}{\|t\|^2+1},\ i = 1,\ldots,n$$

es fácil ver que $x(z) = t$. Esto prueba que x es una carta y de forma totalmente análoga se puede mostrar que (V,y) es, también, una carta n-dimensional sobre $\mathbb{S}^n$. Como $U \cup V = \mathbb{S}^n$, sólo resta comprobar que los cambios de cartas $x \circ y^{-1}$ e $y \circ x^{-1}$ son aplicaciones diferenciables. Sea $t \in \mathbb{R}^n$, entonces la aplicación $x \circ y^{-1} : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ está definida por

$$x \circ y^{-1}(t) = \frac{t}{\|t\|^2},$$

que es claramente diferenciable en su dominio. Como $x \circ y^{-1} = y \circ x^{-1}$, queda probado que $\{(U,x),(V,y)\}$ es un atlas sobre la esfera.
Veamos a continuación que dicho atlas es equivalente al atlas determinado por los hemisferios. Para esto es suficiente probar que los cambios de cartas (entre cartas de un atlas y de otro) son diferenciables. Sin pérdida de generalidad, consideremos las cartas (U,x) y (U_{10},φ_{10}) pertenecientes al atlas estereográfico y al atlas de los hemisferios, respectivamente. Entonces $U \cap U_{10} = U_{10}$ y consecuentemente $x(U \cap U_{10}) = \{t \in \mathbb{R}^n \mid t_1 > 0\} \equiv H$ y $\varphi_{10}(U \cap U_{10}) = \{t \in \mathbb{R}^n \mid \|t\| < 1\} \equiv B(0;1)$. Los cambios de cartas están, por tanto, definidos como sigue:

$$x \circ \varphi_{10}^{-1} : B(0;1) \to H, \quad x \circ \varphi_{10}^{-1}(t_1,\ldots,t_n) = \left(\frac{\sqrt{1-\|t\|^2}}{1-t_n}, \frac{t_1}{1-t_n}, \ldots, \frac{t_{n-1}}{1-t_n}\right)$$

$$\varphi_{10} \circ x^{-1} : H \to B(0;1), \quad \varphi_{10} \circ x^{-1}(t_1,\ldots,t_n) = \left(\frac{2t_2}{\|t\|^2+1}, \ldots, \frac{2t_n}{\|t\|^2+1}, \frac{\|t\|^2-1}{\|t\|^2+1}\right)$$

que son claramente aplicaciones diferenciables. En consecuencia, ambos atlas son equivalentes, por lo que determinan la misma estructura diferenciable sobre la esfera $\mathbb{S}^n$.

Ejemplo (El espacio proyectivo real n-dimensional)
En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ se define la siguiente relación de equivalencia:

$$x \sim y \text{ si, y sólo si, } x \text{ e } y \text{ son colineales.}$$

Denotemos por $P^n(\mathbb{R})$ el conjunto cociente de las clases de equivalencia. Vamos a dotar a $P^n(\mathbb{R})$ de una estructura de variedad diferenciable. $P^n(\mathbb{R})$, con dicha estructura diferenciable, se denomina el *espacio proyectivo real n-dimensional*.
Dado el punto $x = (x_1, \ldots, x_{n+1})$, denotaremos por $[(x_1, \ldots, x_{n+1})]$ a la clase de equivalencia determinada por x. Definimos los subconjuntos $V_i \subset P^n(\mathbb{R})$ por $V_i = \{[(x_1, \ldots, x_{n+1})] \mid x_i \neq 0\}$, y consideramos las aplicaciones $\varphi_i : V_i \to \mathbb{R}^n$ dadas por $\varphi_i([x]) = \frac{1}{x_i}(x_1, .\overset{\hat{i}}{.}., x_{n+1})$, para $i = 1, \ldots, n+1$, donde $(x_1, .\overset{\hat{i}}{.}., x_{n+1})$ es una notación para indicar que hemos suprimido la coordenada i-ésima x_i. Entonces $\{(V_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{n+1}$ constituye un atlas sobre $P^n(\mathbb{R})$.
a) (V_i, φ_i) es una carta n-dimensional. Comprobemos, en primer lugar, que φ_i está bien definida, es decir: si $[x] = [y]$ entonces $\varphi_i([x]) = \varphi_i([y])$. Si $[x] = [y]$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $y_j = \lambda x_j$, $j = 1, \ldots, n+1$. Si $y_i \neq 0$ y $x_i \neq 0$ entonces

$$\varphi_i([y]) = \frac{1}{y_i}(y_1, .\overset{\hat{i}}{.}., y_{n+1}) = \frac{1}{\lambda x_i}(\lambda x_1, .\overset{\hat{i}}{.}., \lambda x_{n+1}) = \varphi_i([x])$$

La aplicación φ_i es inyectiva, pues si $\varphi_i([x]) = \varphi_i([y])$ entonces $x_j/x_i = y_j/y_i$, $j = 1, \ldots, n+1$, $j \neq i$. Pero entonces $y_j = (y_i/x_i)x_j$ para todo j, por lo que $y = \lambda x$, con $\lambda = y_i/x_i$, y consecuentemente $[y] = [x]$.
La aplicación φ_i es sobreyectiva sobre $\mathbb{R}^n$, ya que si $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces $[x] = [(t_1, \ldots, t_{i-1}, 1, t_i, \ldots, t_n)] \in V_i$ y $\varphi_i([x]) = t$.
b) Trivialmente se tiene $\cup_{i=1}^{n+1} V_i = P^n(\mathbb{R})$, ya que si $[x] \in P^n(\mathbb{R})$ entonces existe un índice i tal que $x_i \neq 0$, por lo que $[x] \in V_i$.
c) Para finalizar debemos comprobar la diferenciabilidad de los cambios de cartas. Para ello, y sin pérdida de generalidad, consideremos las cartas (V_1, φ_1) y (V_2, φ_2). Entonces $\varphi_1(V_1 \cap V_2) = \{t \in \mathbb{R}^n \mid t_1 \neq 0\} = \varphi_2(V_1 \cap V_2)$ y los cambios de cartas están definidos por

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(t_1, \ldots, t_n) = \varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{t_1}(1, t_2, \ldots, t_n)$$

que son, claramente, diferenciables.

1.3. Aplicaciones diferenciables

En esta sección vamos a introducir el concepto de aplicación diferenciable, herramienta básica si se quiere extender el cálculo diferencial a las nuevas estructuras que acabamos de definir.

Comenzaremos por el caso más sencillo, cuando el conjunto de llegada es el espacio euclídeo $\mathbb{R}$. Sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función, sea p un punto de su dominio y consideremos (U, φ) una carta en M cuyo dominio contiene a p. Entonces la aplicación $F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ se denomina la *representante local* o *representante en coordenadas* de f (respecto de la carta (U, φ)).

Definición 1.14 (Función diferenciable)
Una función $f : M \to \mathbb{R}$ es *diferenciable en un punto p* de su dominio si una representante local $F = f \circ \varphi^{-1}$ (y, por tanto, todas) es diferenciable en $\varphi(p)$. La función se dice *diferenciable* si lo es en todos los puntos de su dominio.

La razón de que la definición anterior sea correcta se encuentra en el siguiente razonamiento. Sean (U, φ) y (V, ψ) dos cartas en M cuyos dominios contienen al punto p, y consideremos $F = f \circ \varphi^{-1}$ y $G =$

$f \circ \psi^{-1}$ las representantes locales respectivas. Entonces, utilizando el cambio de cartas, podemos comprobar que $F = G \circ (\psi \circ \varphi^{-1})$, por lo que F es diferenciable en $\varphi(p)$ si, y sólo si, G es diferenciable en $\psi(p)$. El conjunto de todas las funciones (reales) diferenciables definidas en M será denotado por $\mathscr{C}^\infty(M)$ y es fácil ver que admite estructura de anillo conmutativo. Utilizaremos la notación $\mathscr{C}^\infty(p)$ para referirnos al conjunto de las funciones diferenciables en el punto p.

Introduzcamos ahora el caso general. Sea $f : M^m \to N^n$ una aplicación, sea p un punto de su dominio y consideremos (U, φ) una carta en M cuyo dominio contiene a p y (V, ψ) una carta en N cuyo dominio contiene a $f(U)$. Entonces la aplicación $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ se denomina la *representante local* o *representante en coordenadas* de f (respecto de las cartas (U, φ) y (V, ψ)).

Definición 1.15 (Aplicación diferenciable)
Una aplicación $f : M \to \mathbb{R}$ es *diferenciable en un punto p* de su dominio si una representante local $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ (y, por tanto, todas) es diferenciable en $\varphi(p)$. La aplicación se dice *diferenciable* si lo es en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo (La aplicación determinante)
Sea $\mathscr{M}(n, \mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas reales de orden n con su estructura de variedad diferenciable y consideremos la aplicación determinante $det : \mathscr{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Veamos que det es una aplicación diferenciable. Sea $\varphi : \mathscr{M}(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$ la carta estándar sobre las matrices cuadradas (ver Ejemplo en p. 7) y consideremos $F : \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}$ la representante local de la aplicación determinante det, es decir,

$$F(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}) = det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Utilizando la definición del determinante deducimos que

$$F(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots, x_{mn}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)},$$

donde S_n es el grupo de las permutaciones de n letras y ε_σ denota la signatura de la permutación σ. Al ser F un polinomio de grado n en n^2 variables es diferenciable (de clase $\mathscr{C}^\infty$) y, en consecuencia, la aplicación det es también diferenciable.

En ocasiones, y por simplificar la escritura, consideraremos aplicaciones diferenciables $f : M \to N$. En estos casos, y aunque no se mencione explícitamente, estaremos suponiendo que tanto M como N son variedades diferenciables.

Definición 1.16 (Difeomorfismo)
Una aplicación $f : M \to N$ se dice que es un *difeomorfismo* si es biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable. En tal caso, las variedades M y N se dice que son *difeomorfas*.

Uno de los principales objetivos de la Geometría Diferencial es la clasificación de las variedades diferenciables, teniendo en cuenta que dos variedades difeomorfas se consideran la misma desde el punto de vista de la teoría de variedades diferenciables.

Ejemplo
Las variedades diferenciables $(\mathbb{R}, 1)$ y $(\mathbb{R}, \varphi)$ (ver Ejemplos en p. 5) son variedades diferenciables difeomorfas. En efecto, definamos la aplicación $f : (\mathbb{R}, 1) \to (\mathbb{R}, \varphi)$ por $f(s) = \sqrt[3]{s}$. Trivialmente, f es biyectiva y tanto ella como su inversa f^{-1} son diferenciables, ya que sus representantes locales son la aplicación identidad.

Ejemplo
Sea la función $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z) = (x\cos z - y\operatorname{sen} z,\ x\operatorname{sen} z + y\cos z,\ z).$$

No es difícil probar lo siguiente:
(a) $f|_{\mathbb{S}^2}$ toma valores en $\mathbb{S}^2$.
(b) La aplicación inducida de $\mathbb{S}^2$ en sí misma es un difeomorfismo.
Para probar **a)**, denotemos por f_1, f_2, f_3 a las tres componentes de la aplicación f. Entonces $f(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$ si, y sólo si, $|f(x,y,z)|^2 = f_1(x,y,z)^2 + f_2(x,y,z)^2 + f_3(x,y,z)^2 = 1$. Consideremos un punto $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$:

$$\begin{aligned}
|f(x,y,z)|^2 &= (x\cos z - y\operatorname{sen} z)^2 + (x\operatorname{sen} z + y\cos z)^2 + z^2 \\
&= x^2\cos^2 z + y^2\operatorname{sen}^2 z - 2xy\operatorname{sen} z\cos z \\
&\quad + x^2\operatorname{sen}^2 z + y^2\cos^2 z + 2xy\operatorname{sen} z\cos z + z^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 = 1.
\end{aligned}$$

b) Veamos, en primer lugar, que f es biyectiva. Supongamos que $f(x,y,z) = f(x',y',z')$. Entonces $z = z'$ y

$$\begin{aligned}
x\cos z - y\operatorname{sen} z &= x'\cos z - y'\operatorname{sen} z, \\
x\operatorname{sen} z + y\cos z &= x'\operatorname{sen} z + y'\cos z.
\end{aligned}$$

Reorganizando las ecuaciones anteriores podemos escribir

$$\begin{aligned}
(x-x')\cos z - (y-y')\operatorname{sen} z &= 0, \\
(x-x')\operatorname{sen} z + (y-y')\cos z &= 0,
\end{aligned}$$

que representa un sistema de ecuaciones lineales homogéneo en las incógnitas $(x-x')$ e $(y-y')$, cuya matriz de coeficientes tiene determinante 1. En consecuencia, la única solución es la solución trivial y, así, $x = x'$ e $y = y'$. Para comprobar la sobreyectividad, sea $(a,b,c) \in \mathbb{S}^2$; debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
x\cos z - y\operatorname{sen} z &= a, \\
x\operatorname{sen} z + y\cos z &= b, \\
z &= c.
\end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de $z = c$ en las dos primeras ecuaciones obtenemos un sistema de ecuaciones lineales cuya solución está dada por $x = a\cos c - b\operatorname{sen} c$ e $y = b\cos c - a\operatorname{sen} c$.
Comprobemos, finalmente, que f es una aplicación diferenciable (la demostración para f^{-1} es totalmente análoga). Sea $p_0 \in \mathbb{S}^2$, entonces la aplicación f es diferenciable en p_0 si $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es diferenciable en $\varphi(p_0)$, donde φ y ψ son cartas en la esfera $\mathbb{S}^2$ alrededor de los puntos p_0 y $f(p_0)$, respectivamente. Supongamos, por ejemplo, que $p_0 = (x,y,z)$ con $z > 0$. Podemos considerar la carta de los hemisferios (U_{30}, φ_{30}) tanto para el punto p_0 como para el punto $f(p_0)$ (ver Ejemplo en p. 8). Entonces la representante local de f respecto de φ_{30} está dada por

$$\begin{aligned}
\varphi_{30} \circ f \circ \varphi^{-1}(x,y) = \ & (x\cos\sqrt{1-x^2-y^2} - y\operatorname{sen}\sqrt{1-x^2-y^2}, \\
& x\operatorname{sen}\sqrt{1-x^2-y^2} + y\cos\sqrt{1-x^2-y^2})
\end{aligned}$$

que es, claramente, diferenciable en su dominio. En consecuencia, f es un difeomorfismo.

1.4. La topología inducida

Antes de introducir la topología que genera una estructura diferenciable presentamos un par de definiciones y un resultado.

Definición 1.17 (Cartas compatibles)
Dos cartas (U,φ) y (V,ψ) se dice que son *compatibles* si o bien $U\cap V=\varnothing$ o bien $\psi\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap V)\to\psi(U\cap V)$ es un difeomorfismo entre abiertos.

Definición 1.18 (Carta admisible)
Sea $(M,\mathscr{A})$ una variedad diferenciable. Una carta (U,φ) se dice que es *admisible* si es compatible con todas las cartas del atlas $\mathscr{A}$.

Proposición 1.19
Sea M una variedad diferenciable y consideremos (U,φ) una carta admisible. Si $W\subset U$ es tal que $\varphi(W)$ es un abierto en $\mathbb{R}^n$, entonces (W,z), siendo $z=\varphi|_W$, es también una carta admisible.

Tras establecer el concepto de carta admisible, es fácil probar lo siguiente.

Proposición 1.20
La colección de todos los entornos coordenados de una variedad diferenciable M constituye una base para una topología sobre M, que denominaremos topología inducida *(por la estructura diferenciable) y que denotaremos por τ_0.*

En esta topología, un subconjunto $A\subset M$ es abierto si, y sólo si, $A\cap U$ es un entorno coordenado para cualquier carta (U,φ). No es difícil probar que es suficiente con demostrarlo para los sistemas de coordenadas de un atlas diferenciable.

Una vez introducida dicha topología, ya es posible hablar de continuidad de funciones y, en particular, de homeomorfismos. En este sentido, puede probarse la siguiente propiedad importante.

Proposición 1.21
Las cartas que definen la estructura diferenciable son homeomorfismos en la topología inducida.

También se satisfacen las siguientes propiedades, que generalizan las análogas del cálculo diferencial sobre $\mathbb{R}^n$.

Proposición 1.22

(a) *Si una aplicación $f:M\longrightarrow M'$ es diferenciable en un punto $p\in M$ entonces, usando las topologías inducidas en M y M', f es continua en p.*

(b) *Si $f:M\longrightarrow M'$ es una aplicación diferenciable y U es un subconjunto abierto de M que interseca el dominio de f, entonces $f|_U$ es también diferenciable. Si f es un difeomorfismo, entonces $f|_U$ es también un difeomorfismo.*

1.4.1. Estructura diferenciable sobre un espacio topológico

En este punto conviene indicar que podría suceder, como de hecho así ocurre en la mayoría de los ejemplos que se han presentado, que el conjunto base sobre el que construimos la variedad diferenciable tenga ya una topología propia. Es lógico entonces plantearse cuándo esta topología coincidirá con la topología inducida. En esta misma línea, es natural preguntarse cómo podemos dotar de una estructura diferenciable a un espacio topológico de manera que sea compatible con su estructura topológica (es decir, que la topología inducida por la estructura diferenciable coincida con la topología del espacio).

Proposición 1.23
Sea (M,τ) un espacio topológico y consideremos $\mathscr{A}$ una estructura diferenciable sobre M. Entonces la topología inducida τ_0 coincide con τ si, y sólo si, las cartas de $\mathscr{A}$ son homeomorfismos en τ.

Este resultado motiva la siguiente definición.

Definición 1.24 (Atlas sobre un espacio topológico)
Sea M un espacio topológico. Un *atlas diferenciable n-dimensional* sobre M es una familia $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ de cartas satisfaciendo las siguientes condiciones:
(1) $\cup_{\alpha\in A} U_\alpha = M$.
(2) Las cartas φ_α son homeomorfismos de U_α en abiertos de $\mathbb{R}^n$.
(3) Para todo par de índices α y β, las cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ y (U_β, φ_β) son compatibles.
Diremos que el atlas $\mathscr{A}$ determina una *estructura diferenciable* sobre M si es maximal para las condiciones anteriores.

1.4.2. Propiedades de la topología inducida

A continuación estudiamos las propiedades más importantes de la topología inducida, sobre todo en lo referente a la separabilidad y numerabilidad de la variedad.

Proposición 1.25
La topología inducida sobre una variedad satisface el axioma de separación T_1 y es localmente Hausdorff.

El resultado anterior no puede mejorarse, ya que es posible encontrar variedades diferenciables que no son Hausdorff. Un ejemplo sencillo se muestra a continuación.

Ejemplo
Sea M el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ siguiente:

$$M = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,1)\}$$

y consideremos las siguientes aplicaciones:

$$x : U = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}, \qquad x(t,0) = t,$$
$$y : V = \{(t,0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0\} \cup \{(0,1)\} \to \mathbb{R}, \qquad y(t,0) = t, \quad y(0,1) = 0.$$

Es fácil ver que $\{(U,x),(V,y)\}$ es un atlas sobre M y que los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$ no pueden separarse.

Proposición 1.26
La topología inducida sobre una variedad satisface el primer axioma de numerabilidad $1A\mathbb{N}$.

Como ocurría con la propiedad anterior, este resultado no puede mejorarse, ya que existen ejemplos de variedades diferenciables que no satisfacen el segundo axioma de numerabilidad. ¿Puedes encontrar un ejemplo?

En general, y puesto que una variedad diferenciable es localmente homeomorfa a un espacio euclídeo, todas las propiedades locales de $\mathbb{R}^n$ que involucren a conjuntos abiertos también se verificarán en variedades. Por ejemplo, toda variedad es localmente conexa y localmente conexa por arcos.

Ya hemos visto que una variedad diferenciable no tiene que ser necesariamente Hausdorff ni $2A\mathbb{N}$; sin embargo, para poder desarrollar un cálculo diferencial sobre variedades necesitamos introducir el concepto de límite, y el axioma de Hausdorff es precisamente el que nos asegura la unicidad de dicho límite. Por esta razón, en muchas ocasiones se parte de un espacio topológico Hausdorff para dotarlo de una estructura diferenciable. Exigir esta propiedad es bastante natural, ya que $\mathbb{R}^n$ la satisface y, en consecuencia, cualquier variedad $M \subset \mathbb{R}^n$, que esté dotada de la topología relativa, también la satisface. Otra propiedad interesante es la siguiente.

Proposición 1.27
La topología de una variedad diferenciable es localmente compacta.

Recordemos que un espacio M se dice que es *localmente compacto en p* si existe un subespacio compacto C de M que contiene un entorno (abierto) de p. Si M es localmente compacto en cada uno de sus puntos, se dice que M es *localmente compacto*.

Otra propiedad topológica importante es el segundo axioma de numerabilidad, propiedad hereditaria que se conserva para los productos. La importancia de este axioma quedará puesta de manifiesto en la siguiente sección. Una condición necesaria para que una variedad satisfaga este axioma se recoge en el siguiente resultado.

Proposición 1.28
Toda variedad diferenciable con un atlas numerable satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Como consecuencia inmediata, toda variedad compacta satisface $2A\mathbb{N}$.

En relación con las propiedades topológicas de una variedad diferenciable, debemos tener la precaución necesaria para evitar errores fácilmente evitables. Por ejemplo, si consideramos la figura ocho $E \subset \mathbb{R}^2$, entonces es fácil pensar que E es una variedad compacta, ya que con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$ ocurre así. Sin embargo, E admite un atlas de una sola carta, por lo que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{R}$ y, consecuentemente, nunca podrá ser compacta. La razón hay que buscarla en que las cartas de E no son homeomorfismos en la topología relativa.

1.4.3. Variedades paracompactas

En esta sección justificaremos la conveniencia de imponer ciertas restricciones topológicas a la variedad, más concretamente el axioma de separación T_2 (Hausdorff) y el segundo axioma de numerabilidad. Entre las razones para aceptar estas restricciones, una fundamental es garantizar la existencia de familias especiales de funciones diferenciables definidas en M y con valores en $\mathbb{R}$, denominadas particiones diferenciables de la unidad, que resultan ser una herramienta extraordinariamente útil para construir objetos globales a partir de otros definidos localmente.

Definición 1.29 (Soporte de una función)
El *soporte* de una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ es el siguiente conjunto:

$$\mathrm{sop}(f) = \overline{\{p \in M \mid f(p) \neq 0\}}.$$

Definición 1.30 (Familia localmente finita)
Una familia $\mathscr{A}$ de abiertos de M es *localmente finita* si todo punto de M tiene un entorno que interseca a un número finito de elementos de $\mathscr{A}$.

Introducimos ahora el concepto de partición diferenciable de la unidad.

Definición 1.31 (Partición diferenciable de la unidad)
Una colección $\{f_\alpha : M \to [0,1] \subset \mathbb{R}\}_\alpha$ de funciones diferenciables se dice que es una *partición (diferenciable) de la unidad* si satisface las siguientes condiciones:
(1) El soporte de cada función f_α es compacto y está contenido en un entorno coordenado.
(2) La colección de los soportes $\{\mathrm{sop}(f_\alpha)\}$ es una familia localmente finita.
(3) Para todo punto p de M, $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$.
Si M admite una partición diferenciable de la unidad, diremos que M es una variedad *paracompacta*.

Se dice que una partición de la unidad $\{f_\alpha\}_\alpha$ está subordinada a un cubrimiento $\{U_i\}_i$ si para cada α existe un i tal que $\mathrm{sop}(f_\alpha) \subset U_i$.

Muchos de los problemas que se presentan en Geometría Diferencial tienen una fácil solución en un entorno coordenado. Las particiones de la unidad se utilizan para construir soluciones globales a los problemas a partir de las soluciones locales.

Proposición 1.32
Si M es una variedad diferenciable paracompacta entonces M es Hausdorff.

Teorema 1.33
Una variedad diferenciable M es paracompacta si, y sólo si, M es Hausdorff y cada componente conexa de M satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Finalizamos la sección presentando un teorema de extensión de funciones diferenciables definidas en el entorno de un punto, el cual puede considerarse como la primera aplicación de las particiones diferenciables de la unidad. Antes enunciaremos otra aplicación más sencilla.

Proposición 1.34
Sea M una variedad paracompacta, $U \subset M$ un subconjunto abierto y $C \subset U$ un subconjunto cerrado. Entonces existe una función diferenciable $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ tal que $f \equiv 1$ en C y $f \equiv 0$ en $M \backslash U$.

Corolario 1.35
Sea M una variedad paracompacta y U un entorno de un punto p. Entonces existe una función salto f en p subordinada a U, es decir:
(1) $0 \leq f \leq 1$.
(2) $f \equiv 1$ *en algún entorno de* p.
(3) $\mathrm{sop}(f) \subset U$.

Proposición 1.36 (Extensión de funciones)
Sea M una variedad paracompacta y consideremos un punto p en el dominio de una función diferenciable f (no definida necesariamente en todo M). Entonces existe una función diferenciable global F que coincide con f en un entorno de p.

1.5. El espacio tangente

Sea M una variedad diferenciable. Una *curva* en M es una aplicación diferenciable $\alpha : I \to M$ de un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ en M. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \in I$. Dado un punto $p \in M$ y una curva α en M, se dice que α pasa por p si existe un valor $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(t_0) = p$. Si una curva α pasa por un punto p siempre podemos reparametrizar la curva para que $\alpha(0) = p$.

Definición 1.37 (Vector tangente a una curva)
Sea α una curva en M que pasa por p, $\alpha(0) = p$. El *vector tangente a α en p* es la aplicación $\alpha'(0) : \mathscr{C}^\infty(p) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\alpha'(0)(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \alpha).$$

Definición 1.38 (Derivación local)
Sea $p \in M$. Una *derivación local* en p (o en $\mathscr{C}^\infty(p)$) es una aplicación lineal $v : \mathscr{C}^\infty(p) \to \mathbb{R}$ que cumple la propiedad

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g),$$

para cualesquiera funciones $f, g \in \mathscr{C}^\infty(p)$.

Haciendo un razonamiento sencillo, totalmente análogo al que se realiza en $\mathbb{R}^n$, se puede demostrar lo siguiente.

Proposición 1.39
El vector tangente $\alpha'(0)$ a una curva α es una derivación sobre $\mathscr{C}^\infty(p)$.

Definición 1.40 (Vector tangente)
Un *vector tangente* a M en p es un vector tangente a una curva α en el punto p. El conjunto de todos los vectores tangentes a M en p se denomina el *espacio tangente* a M en p y se denota por T_pM.

Antes de poner algún ejemplo de vector tangente vamos a introducir un concepto importante en el cálculo diferencial en variedades.

Definición 1.41 (Derivada parcial de una función)
Sea $p \in M$ y consideremos (U,φ) una carta local alrededor de p con funciones coordenadas $(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Dada una función $f \in \mathscr{C}^\infty(p)$, la *derivada parcial* de f con respecto a x_i en el punto p es

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial (f\circ\varphi^{-1})}{\partial u_i}(\varphi(p)),$$

donde $(u_1,\dots,u_n)$ son las coordenadas cartesianas naturales de $\mathbb{R}^n$.

Sea (U,φ) una carta local y consideremos un punto $p \in U$. Entonces podemos construir la aplicación

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p : \mathscr{C}^\infty(p) \to \mathbb{R}$$

definida por

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Es fácil demostrar que dicha aplicación es una derivación sobre $\mathscr{C}^\infty(p)$. A continuación vamos probar que también es un vector tangente a M en p. Para ello debemos construir una curva α_i que pase por el punto p y lo tenga por vector tangente.

Sea $\{e_1,\dots,e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$ y consideremos la curva en M definida por $\alpha_i(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p)+te_i)$, denominada la i-ésima curva coordenada de M en el punto p. Supongamos que las representantes locales de α_i y f están dadas por

$$\beta_i(t) = (\varphi\circ\alpha_i)(t) = (u_1(t),\dots,u_n(t))$$

y

$$F(u_1,\dots,u_n) = (f\circ\varphi^{-1})(u_1,\dots,u_n).$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\alpha_i'(0)(f) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(F\circ\beta_i)(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(u_1(t),\dots,u_n(t)) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial u_j}(\beta_i(0))\frac{du_j}{dt}(0) \\
&= \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p (f),
\end{aligned}$$

lo que demuestra nuestra afirmación anterior.

Proposición 1.42
El conjunto $\mathscr{D}(p)$ de todas las derivaciones sobre $\mathscr{C}^\infty(p)$ tiene estructura de espacio vectorial. Si (U,φ), $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$, es una carta local cuyo dominio contiene al punto p, entonces $\{ \left.\frac{\partial}{\partial x_1}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x_2}\right|_p, \dots, \left.\frac{\partial}{\partial x_n}\right|_p \}$ constituye una base para $\mathscr{D}(p)$.

Puede demostrarse, sin mucha dificultad, el siguiente resultado.

Lema 1.43
Si $f \in \mathscr{C}^\infty(p)$ entonces la función f se escribe, en un entorno de p, como

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i(p)) h_i,$$

para ciertas funciones $h_1, \ldots, h_n \in \mathscr{C}^\infty(p)$.

Como consecuencia de este resultado se obtiene que toda derivación sobre $\mathscr{C}^\infty(p)$ es, de hecho, un vector tangente a M en p. Esto conduce al siguiente teorema.

Teorema 1.44
Sea $p \in M^n$. El espacio tangente T_pM es un espacio vectorial (real) de dimensión n.

Hemos probado que cada sistema de coordenadas o carta local que contenga al punto p en su dominio nos proporciona una base canónica de T_pM, por lo que es natural plantearse cómo estarán relacionadas dos bases asociadas a sistemas de coordenadas distintos. La respuesta a esta cuestión es muy sugerente:

Proposición 1.45
Dadas dos bases de T_pM asociadas a dos sistemas de coordenadas, la matriz del cambio de base no es más que la matriz jacobiana de la aplicación cambio de cartas.

El espacio cotangente

Definición 1.46 (Covector tangente)
Un *covector tangente* a una variedad M en un punto p es una forma lineal sobre T_pM. El conjunto de tales covectores constituye el espacio vectorial dual del espacio tangente y se denomina espacio cotangente a M en p, denotándose, como es habitual, por $(T_pM)^*$ o T_p^*M.

Definición 1.47 (Diferencial de una función en un punto)
Dada una función diferenciable $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, se define la *diferencial de f en un punto p* como el covector df_p dado por

$$df_p(v) = v(f),$$

para todo vector $v \in T_pM$.

Vamos a obtener ahora una base distinguida de T_p^*M. Sea (U, φ) un sistema de coordenadas con funciones coordenadas asociadas $(x_1, \ldots, x_n)$ y sea $p \in U$. Entonces el conjunto $\{dx_{1p}, \ldots, dx_{np}\}$ constituye una base de T_p^*M. Es fácil ver que todo covector $\omega \in T_p^*M$ se expresa de forma única como

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(\partial_i|_p) dx_{ip},$$

donde $\partial_i|_p$ denota el i-ésimo campo coordenado asociado a la carta φ. En particular, para toda función diferenciable f y todo punto p se satisface lo siguiente

$$df_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) dx_{ip}.$$

1.6. La diferencial de una aplicación

Una vez introducido el espacio euclídeo adecuado para poder generalizar el cálculo diferencial real, se hace preciso indicar cómo se deriva una aplicación diferenciable $f : M \to N$. La diferencial de una aplicación diferenciable (entre espacios euclídeos) en un punto es una aplicación lineal, la más *próxima* de todas las lineales, cuya matriz asociada es la matriz jacobiana de la aplicación en dicho punto. En la presente sección pretendemos extender estas ideas a variedades diferenciables.

En primer lugar, observemos que toda aplicación diferenciable f entre variedades M y N determina, de manera natural, una aplicación lineal entre los espacios tangentes T_pM y $T_{f(p)}N$, para cada punto p que se considere en el dominio de f. En efecto, dado un vector tangente $v \in T_pM$ podemos considerar la aplicación $w : \mathscr{C}^\infty(f(p)) \to \mathbb{R}$ definida por $w(g) = v(f \circ g)$. Es fácil ver que w es un vector tangente a N en $f(p)$. Llegamos así a la siguiente definición.

Definición 1.48 (Diferencial de una aplicación)
Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable y p un punto de su dominio. La diferencial de f en p se define como la aplicación $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ dada por $df_p(v)(g) = v(f \circ g)$, para $g \in \mathscr{C}^\infty(f(p))$.

Esta aplicación, también denotada por f_{*p}, es $\mathbb{R}$-lineal. ¿Cómo se puede interpretar $df_p(v)$ como el vector tangente a una curva? Si suponemos que $v = \alpha'(0)$, siendo α una curva en M que pasa por p en el instante $t = 0$, entonces de la propia definición se deduce fácilmente que $df_p(v) = \beta'(0)$, donde β es la curva en N que pasa por $f(p)$ definida por $\beta = f \circ \alpha$.

El paso siguiente es encontrar la matriz de la aplicación diferencial df_p, una vez que hemos fijado las bases en los espacios tangentes de partida y de llegada. Como consecuencia del teorema de la base es fácil probar lo siguiente.

Proposición 1.49 (Matriz de la aplicación diferencial)
Si se escogen las bases canónicas asociadas a dos sistemas de coordenadas, uno para el punto p y otro para el punto imagen $f(p)$, la matriz de la diferencial de f en el punto p no es más que la matriz jacobiana de su representante local en el punto correspondiente.

Proposición 1.50 (Regla de la cadena)
Sean $f : M \to N$ y $g : N \to P$ dos aplicaciones diferenciables y sea p un punto del dominio de $g \circ f$. Entonces

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p.$$

Definición 1.51 (Rango de una aplicación)
El *rango* de una aplicación diferenciable $f : M \to N$ en un punto p es la dimensión del subespacio vectorial imagen $df_p(T_pM) \subset T_{f(p)}N$.

Como una aplicación inmediata de la regla de la cadena se deduce que si f es un difeomorfismo entre dos variedades, entonces la diferencial de f en todo punto es un isomorfismo lineal. El siguiente resultado nos dice que, localmente, se verifica también el recíproco.

Proposición 1.52 (Teorema de la función inversa)
Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable y sea p un punto de su dominio. La aplicación diferencial df_p es un isomorfismo lineal si, y sólo si, existe un entorno U de p tal que $f|_U : U \to f(U)$ es un difeomorfismo.

El teorema anterior justifica que introduzcamos la siguiente definicion.

Definición 1.53 (Difeomorfismo local)
Una aplicación diferenciable f es un *difeomorfismo local* si para todo punto $p \in M$ existe un entorno U de p tal que $f|_U$ es un difeomorfismo.

Consecuentemente, f es un difeomorfismo local si, y sólo si, la aplicación diferencial de f en cualquier punto de M es un isomorfismo lineal, es decir, tiene rango máximo.

Ejemplo
Un difeomorfismo local no es necesariamente un difeomorfismo global. Consideremos la aplicación $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=(e^x\cos y, e^x \operatorname{sen} y)$. Es fácil ver que f es una aplicación diferenciable cuya matriz jacobiana viene dada por

$$\begin{pmatrix} e^x\cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x\cos y \end{pmatrix}.$$

Por tanto, f es un difeomorfismo local. Sin embargo, f no puede ser un difeomorfismo global porque no es biyectiva.

1.7. Los fibrados tangente y cotangente

En esta sección veremos que la unión TM de todos los espacios tangentes a una variedad diferenciable, en todos sus puntos, admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión el doble de la dimensión de la variedad M.

Sea el conjunto TM definido por

$$TM=\bigcup_{p\in M} T_pM.$$

Es fácil comprobar que podemos identificar TM con el siguiente conjunto:

$$TM=\{(p,v)\mid p\in M, v\in T_pM\}.$$

Podemos construir una aplicación proyección de manera natural entre TM y M de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} \pi : TM & \to & M \\ (p,v) & \to & p \end{array}$$

Proposición 1.54 (El fibrado tangente)
El conjunto TM admite estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$, siendo n la dimensión de M. Esta variedad recibe el nombre de fibrado tangente *de M.*

Construyamos un atlas. Sea $\{(V_i,\varphi_i)\}_i$ un atlas de M y consideremos los siguientes subconjuntos de TM:

$$W_i=\{(p,v)\in TM\mid p\in V_i\}$$

y las siguientes aplicaciones:

$$\psi_i : W_i\to\mathbb{R}^{2n}, \qquad \psi_i(p,v)=(\varphi_i(p), d\varphi_{ip}(v)),$$

donde $d\varphi_{ip}(v)=(v(x_1),\ldots,v(x_n))$, siendo $(x_1,\ldots,x_n)$ las funciones coordenadas de la carta φ_i. Es fácil probar que $\{(W_i,\psi_i)\}_i$ constituye un atlas $2n$-dimensional sobre TM.

De manera análoga podemos construir el *fibrado cotangente* de M. Sea el conjunto T^*M definido por

$$T^*M=\bigcup_{p\in M} T_p^*M.$$

Es fácil comprobar que podemos identificar T^*M con el siguiente conjunto:

$$T^*M=\{(p,\omega)\mid p\in M, \omega\in T_p^*M\}.$$

Podemos construir una aplicación proyección de manera natural entre T^*M y M de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} \pi^* : T^*M & \to & M \\ (p,\omega) & \to & p \end{array}$$

Proposición 1.55 (El fibrado cotangente)
El conjunto T^*M admite estructura de variedad diferenciable de dimensión $2n$, siendo n la dimensión de M. Esta variedad recibe el nombre de fibrado cotangente *de M.*

Consideremos los siguientes subconjuntos de T^*M:

$$W_i^* = \{(p,\omega) \in T^*M \mid p \in V_i\}$$

y las siguientes aplicaciones:

$$\psi_i^* : W_i^* \to \mathbb{R}^{2n}, \qquad \psi_i^*(p,\omega) = (\varphi_i(p), \omega(\partial_1|_p), \ldots, \omega(\partial_n|_p))$$

siendo $(x_1,\ldots,x_n)$ las funciones coordenadas de la carta φ_i. Es fácil probar que $\{(W_i^*, \psi_i^*)\}_i$ constituye un atlas $2n$-dimensional sobre T^*M.

Si $f : M \to N$ es una aplicación diferenciable, entonces podemos construir una aplicación $df : TM \to TN$ entre los fibrados tangentes de la siguiente manera: $df(p,v) = (f(p), df_p(v))$. La aplicación df, también denotada por f_*, se denomina la *aplicación diferencial* de f.

1.8. Inmersiones

Definición 1.56 (Inmersión)
Una aplicación diferenciable $f : M \to N$ se dice que es una *inmersión* si df_p es inyectiva para todo punto de M. En este caso diremos que M está inmersa en N.

En otras palabras, una inmersión es la aplicación diferenciable entre variedades cuyo rango coincide en todos los puntos con la dimensión de la variedad de partida.

A continuación, y como era de esperar, mostramos un resultado útil que nos permitirá decidir si una aplicación diferenciable es una inmersión o no. Este resultado técnico nos facilitará la búsqueda de ejemplos y nos permitirá obtener algunas propiedades de las inmersiones.

Proposición 1.57
Sea $f : M^m \to N^n$ una aplicación diferenciable y $p \in M$. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:
1) *La diferencial df_p es inyectiva.*
2) *La matriz jacobiana tiene rango m relativo a un sistema de coordenadas (y, por tanto, relativo a todos).*
3) *Si $\{y_i\}_i$ es un sistema de coordenadas en N para $f(p)$, existen m enteros $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m \leq n$ tales que las funciones $\{y_{i_1} \circ f, y_{i_2} \circ f, \ldots, y_{i_m} \circ f\}$ constituyen un sistema de coordenadas en un entorno de p.*

Ejemplos

- Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ una curva diferenciable y regular, es decir, $\alpha'(t) \neq 0$ para todo t. Es fácil ver que α es una inmersión. Por ejemplo, $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.
- Sea $\alpha : I = (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (t^2, t^3)$. Entonces la matriz jacobiana viene dada por

  $$J_\alpha(t) = (2t, 3t^2),$$

  la cual tiene rango uno en todos los puntos salvo en $t = 0$. Luego α no es una inmersión.

1.8.1. Propiedades de las inmersiones

Las siguientes propiedades de las inmersiones pueden probarse muy fácilmente recurriendo a las representantes locales de las aplicaciones diferenciables.

Proposición 1.58
Sea $f : M \to N$ una inmersión y $g : M \to N'$ una aplicación diferenciable. Entonces $(f,g) : M \to N \times N'$ es una inmersión.

Proposición 1.59
Sean $f : M \to N$ y $g : M' \to N'$ dos inmersiones. Entonces la aplicación producto $f \times g : M \times M' \to N \times N'$ es una inmersión.

Proposición 1.60
Sea $f : M \to N$ una inmersión y $g : M' \to M$ una aplicación diferenciable. Entonces $f \circ g$ y g tienen el mismo rango.

En particular, queremos destacar la propiedad que afirma que dada una inmersión y un punto en el dominio, es posible encontrar cartas locales alrededor del punto y de su imagen de forma que la representante local sea una inclusión. Más concretamente:

Proposición 1.61
Sea $f : M \to N$ una inmersión y p un punto de M. Entonces existen cartas (V,x) y (W,y) de p y $f(p)$, respectivamente, tales que la representante en coordenadas $y \circ f \circ x^{-1}$ está dada por $z \to (z,0)$.

Veamos seguidamente, a través de un ejemplo, como se pueden obtener explícitamente las cartas a las que se refiere el resultado anterior. Consideremos la inmersión $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$ y sea el punto $t = 0$. La matriz jacobiana en $t = 0$ está dada por

$$J_f(0) = (\cos\, t, -\operatorname{sen}\, t)|_{t=0} = (1,0).$$

Entonces la aplicación $p_1 \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $t \to \operatorname{sen}\, t$ tiene rango uno en $t = 0$ por lo que es un difeomorfismo local. Consideremos la aplicación $\varphi = (p_1 \circ f)^{-1} \times i_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\varphi(t,s) = (\operatorname{arcsen} t, s)$$

y sea la aplicación $k = p_2 \circ \varphi \circ f$. Entonces podemos construir la aplicación $h = q \circ \varphi$, donde $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida por

$$q(t,s) = (t, s - k(t)) = (t, s - \cos\, t).$$

En consecuencia, para $t = 0$ debemos considerar la carta identidad sobre $\mathbb{R}$, y para $f(0) = (0,1)$ debemos considerar la carta $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$h(t,s) = (\operatorname{arcsen} t, s - \cos(\operatorname{arcsen} t)).$$

1.9. Embebimientos y subvariedades

Se definen en esta sección los conceptos de embebimiento y subvariedad, haciendo hincapié en el hecho de que el término *subvariedad* se aplica en ocasiones a objetos con propiedades distintas, surgiendo las subvariedades inmersas y las subvariedades regulares, que es en el sentido en que nosotros las entenderemos.

Definición 1.62 (Embebimiento)
Una inmersión $f : M \to N$ se dice que es un *embebimiento* si es un homeomorfismo en la imagen (con la topología relativa de N).

Definición 1.63 (Subvariedad)
Una variedad $P \subset M$ se dice que es una subvariedad de la variedad M si la inyección canónica $j : P \to M$ es un embebimiento. La *codimensión* de la subvariedad es la diferencia dim M-dim P.

Ejemplos

- Sea M una variedad y consideremos $P \subset M$ un subconjunto abierto. Entonces P admite de manera trivial una estructura diferenciable con la que se convierte en subvariedad de M. P se denomina *subvariedad abierta* de M.
- Sea $GL(n,\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices regulares de orden n. Entonces $GL(n,\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$, y puesto que la aplicación determinante det es diferenciable, y consecuentemente continua, $GL(n,\mathbb{R})$ es una subvariedad abierta de $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$.
- La aplicación $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, m < n$, dada por $f(x_1,\ldots,x_m) = (x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0)$, es claramente un embebimiento.
- Cualquier inmersión es localmente un embebimiento.

En algunas ocasiones se relajan las condiciones de subvariedad, exigiendo solamente que la inclusión canónica sea una inmersión, en lugar de exigir que sea un embebimiento. Nosotros las distinguiremos añadiéndole el apellido *inmersa*. Toda subvariedad es una subvariedad inmersa, pero no recíprocamente. En efecto, es fácil ver que la figura ocho es una subvariedad inmersa que no se puede embeber en $\mathbb{R}^2$.

Proposición 1.64
Toda subvariedad compacta inmersa en un espacio Hausdorff es una subvariedad (embebida o regular).

Con el fin de encontrar una caracterización de las subvariedades, introducimos ahora los sistemas de coordenadas adaptados y probamos que toda subvariedad de una variedad admite un sistema de coordenadas adaptado en cada punto, sirviendo esta propiedad como criterio para decidir si un subconjunto de una variedad admite una estructura diferenciable.

Sea (V,x) una carta en una variedad M. El subconjunto Σ de V que se obtiene haciendo $n-m$ funciones coordenadas constantes es una subvariedad m-dimensional de M denominada *x-rebanada m-dimensional* de U. Vamos a probar que toda subvariedad puede construirse pegando adecuadamente x-rebanadas.

Definición 1.65 (Sistema de coordenadas adaptado)
Sea P un subconjunto de una variedad M. Un sistema de coordenadas (V,x) se dice que está *adaptado* a P si $V \cap P$ es una x-rebanada de V.

Un criterio básico para saber si un subconjunto de una variedad diferenciable es una subvariedad es el siguiente.

Proposición 1.66
Un subconjunto P de una variedad M es una subvariedad m-dimensional de M si para cada punto p de P existe un sistema de coordenadas (V,x) en M adaptado a P tal que $V \cap P$ es una rebanada m-dimensional.

En esta línea, una cuestión sumamente interesante es saber de cuántas maneras se puede dotar a un subconjunto de estructura de variedad diferenciable de forma que se convierta en una subvariedad. La respuesta, de sencilla demostración, nos dice que a lo sumo hay una manera de convertir un subconjunto de una variedad en subvariedad de la misma.

El teorema de la función implícita

Un criterio útil y práctico para encontrar subvariedades nos lo proporciona el teorema de la función implícita, consecuencia del teorema de la función inversa, y que nos permite averiguar cuándo las fibras de una aplicación diferenciable son subvariedades.

Definición 1.67 (Valor regular)
Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Un punto $q \in N$ se dice que es un *valor regular* de f si $f^{-1}(q) \neq 0$ y df_p es sobreyectiva en todo punto $p \in f^{-1}(q)$.

Proposición 1.68 (Teorema de la función implícita)
Sea $f : M^m \to N^n$ una aplicación diferenciable y $q \in N$ un valor regular de f. Entonces $P = f^{-1}(q)$ es una subvariedad $(m-n)$-dimensional de M.

Ejemplos

- Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y consideremos $S = f^{-1}(0)$. Si en cada punto p de S, la matriz $(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p))$ tiene rango 1, entonces S es una subvariedad $(n-1)$-dimensional de $\mathbb{R}^n$, es decir, S es una hipersuperficie.
- Las hiperesferas y los hipercilindros son subvariedades regulares del espacio euclídeo.
- Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por
$$f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2+a^2+b^2)^2 - 4a^2(x^2+y^2),$$
con $a > b > 0$. Entonces $S = f^{-1}(0)$ admite estructura de variedad diferenciable 2-dimensional, es decir, S es una superficie de $\mathbb{R}^3$. Puede comprobarse fácilmente que S es el toro de revolución en $\mathbb{R}^3$.

Corolario 1.69
Sea M^n una variedad diferenciable y sean $f_1, \ldots, f_k$ funciones diferenciables sobre M. Consideremos el subconjunto P de M dado por $P = \{p \in M \mid f_i(p) = 0, i = 1, \ldots, k\}$. Si en cada punto p de P se verifica que $\{df_{1p}, \ldots, df_{kp}\}$ son covectores linealmente independientes, entonces P es una subvariedad cerrada de M de dimensión $n-k$.

Observación
Si M es una variedad diferenciable y $P \subset M$ es una subvariedad diferenciable cerrada tal que $P = \cap_{i=1}^k f_i^{-1}(0)$, para ciertas funciones diferenciables $f_1, \ldots, f_k$, entonces la dimensión de P no es necesariamente igual a $n-k$, ya que los covectores $\{df_{1p}, \ldots, df_{kp}\}$ no tienen por qué ser linealmente independientes.

Una pregunta que cabe plantearse es si cualquier variedad abstracta M es difeomorfa a una subvariedad regular de un espacio euclídeo. La respuesta, de difícil demostración, es afirmativa y se conoce como teorema del embebimiento de Whitney. Dicho teorema establece que cualquier variedad diferenciable n-dimensional (Hausdorff y con una base numerable) se puede embeber en un espacio euclídeo $\mathbb{R}^{2n}$. Una versión más sencilla de este resultado pero que admite una demostración asequible a este nivel, utilizando particiones diferenciables de la unidad, es la siguiente.

Proposición 1.70 (Teorema de Whitney, caso compacto)
Toda variedad diferenciable compacta se puede embeber como subvariedad regular en un cierto espacio euclídeo.

FIN DEL CAPÍTULO 1