Capítulo 2

Campos de vectores y campos de tensores

CONTENIDOS. Campos de vectores diferenciables. Expresión en coordenadas y criterios de diferenciabilidad. El corchete de Lie de dos campos. Campos de vectores a lo largo de una aplicación. Campos tangentes sobre una subvariedad. Curva integral de un campo de vectores. Existencia y unicidad de curvas integrales. Curva integral maximal. Campos de vectores completos. El flujo de un campo. Grupos uniparamétricos de transformaciones. El corchete de Lie y su interpretación geométrica. Uno-formas diferenciables. Expresión en coordenadas y criterios de diferenciabilidad. La diferencial de una función diferenciable. Definición de tensor sobre un espacio vectorial. Campo de tensores sobre una variedad. Expresión en coordenadas y criterios de diferenciabilidad. Componentes tensoriales. El producto tensorial. Álgebra de tensores. Contracción tensorial. El pullback y el pushforward de un tensor. Propiedades.

2.1. Campos de vectores: definiciones y resultados básicos

En el capítulo anterior hemos introducido el concepto de vector tangente a una variedad M en un punto p, esto es, un elemento X_p de T_pM. Ahora vamos a extender este concepto.

Definición 2.1 (Campo de vectores)
Un *campo de vectores* X en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asigna a cada punto p de M un vector tangente $X_p \in T_pM$.

Teniendo en cuenta que el conjunto de todos los vectores tangentes a M, el fibrado tangente TM, puede dotarse de estructura de variedad diferenciable, un campo de vectores X puede interpretarse como una aplicación de M en su fibrado tangente tal que si π es la proyección natural del fibrado en la variedad, se tiene que $\pi \circ X$ es la identidad sobre M; esto es, X es una sección de π.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "X"] \arrow[dr, "\pi \circ X = 1"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Dado que estamos interesados en extender el cálculo a variedades, parece razonable exigir que nuestros campos de vectores sean diferenciables.

Definición 2.2 (Campo de vectores diferenciable)
Un campo de vectores X se dirá *diferenciable* si como aplicación $X : M \to TM$ entre la variedad y su fibrado es diferenciable. El conjunto de todos los campos de vectores diferenciables sobre M se denotará por $\mathfrak{X}(M)$.

¿Cómo se “lee” la diferenciabilidad de un campo de vectores en un sistema de coordenadas?

Sea (U,x) una carta local, con $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Entonces el campo X restringido al entorno coordenado U se puede expresar como sigue:

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p ,$$

para ciertas funciones a_i definidas en U. Entonces puede probarse fácilmente que un campo de vectores X es diferenciable si en cada sistema de coordenadas se cumple que las funciones a_i son diferenciables.

Sea X un campo de vectores sobre M. Para cada punto p de M, $X(p) \equiv X_p$ es un vector tangente a M en p y, por consiguiente, es una derivación local (en el conjunto de las funciones diferenciables en un entorno de p) de manera que los campos de vectores se pueden considerar aplicaciones

$$X : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}(M)$$

dadas por

$$\begin{aligned} X(f) : \quad & M \to \quad \mathbb{R} \\ & p \to \quad X(f)(p) := X_p(f). \end{aligned}$$

Esta interpretación permite caracterizar a los campos de vectores diferenciables como aquellos que transforman funciones diferenciables en funciones diferenciables. Es decir,

Proposición 2.3
Un campo de vectores X es diferenciable si, y sólo si, $X(f)$ es una función diferenciable para toda función diferenciable f.

En el conjunto de los campos de vectores diferenciables sobre M podemos definir dos operaciones naturales, la suma y el producto por funciones diferenciables, del siguiente modo:

Suma: Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces $X+Y : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ está definida por

$$(X+Y)(f) : M \to \mathbb{R}, \quad (X+Y)(f)(p) = X_p(f) + Y_p(f).$$

Producto: Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ entonces $fX : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ está definida por

$$(fX)(g) : M \to \mathbb{R}, \quad (fX)(g)(p) = f(p)X_p(g).$$

Con las dos operaciones anteriores, el conjunto $\mathfrak{X}(M)$ admite estructura de módulo sobre el anillo $\mathscr{C}^\infty(M)$ de las funciones diferenciables.

Hemos definido un vector tangente a M en un punto p como el vector tangente a una curva que pasa por p y hemos visto que puede interpretarse como una derivación sobre $\mathscr{C}^\infty(p)$. Veamos a continuación que es posible caracterizar un campo de vectores de una manera similar.

Definición 2.4 (Derivación)
Una *derivación* sobre $\mathscr{C}^\infty(M)$ es una función $\mathscr{D} : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:
(1) $\mathbb{R}$-linealidad: $\mathscr{D}(af+bg) = a\mathscr{D}(f) + b\mathscr{D}(g)$, para $a,b \in \mathbb{R}$ y $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$.
(2) Regla de Leibnitz: $\mathscr{D}(fg) = \mathscr{D}(f)g + f\mathscr{D}(g)$.

Como una consecuencia de esta definición, todo campo de vectores diferenciable X es una derivación sobre $\mathscr{C}^\infty(M)$, considerando X como una aplicación $f \mapsto X(f)$. El siguiente resultado nos proporciona el recíproco.

Proposición 2.5
Si $\mathscr{D}$ es una derivación sobre $\mathscr{C}^\infty(M)$ entonces existe un único campo de vectores diferenciable $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathscr{D}(f) = X(f)$ para toda función diferenciable f.

2.2. El corchete de Lie

Otra consecuencia interesante de la interpretación discutida en la sección anterior es que nos permite considerar las derivaciones iteradas. Si X e Y son dos campos de vectores diferenciables y f es una función diferenciable, entonces $X(Y(f))$ e $Y(X(f))$ son funciones diferenciables. Sin embargo, este tipo de operaciones no conduce en general a nuevos campos de vectores diferenciables, ya que envuelven derivadas de orden superior a la primera. No obstante, la diferencia de ambas iteraciones sí produce a un nuevo campo de vectores.

Proposición 2.6
Sean X e Y dos campos de vectores diferenciables sobre M. Entonces existe un único campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para toda función $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. El campo Z se denomina el corchete de Lie *de X e Y y se denota por $[X,Y]$.*

Esta forma de construir nuevos campos a partir de otros ya existentes nos permite definir la operación corchete:

$$\begin{array}{rccc} [,]: & \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \to & \mathfrak{X}(M) \\ & (X,Y) & \to & [X,Y] \end{array}$$

que a cada par de campos le asocia su corchete de Lie, la cual posee las siguientes propiedades.

Proposición 2.7
Sean $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vectores diferenciables sobre M, $a,b \in \mathbb{R}$ y $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ funciones diferenciables. Entonces:
(1) $[X,Y] = -[Y,X]$ *(antisimetría).*
(2) $[aX+bY,Z] = a[X,Z]+b[Y,Z]$ *($\mathbb{R}$-linealidad).*
(3) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y] = 0$ *(identidad de Jacobi).*
(4) $[fX,gY] = fg[X,Y]+fX(g)Y-gY(f)X$.

2.3. Campos relacionados por una aplicación diferenciable

La diferencial de una aplicación $f: M \to N$ traslada vectores tangentes a M en vectores tangentes a N. Sin embargo, no hay ninguna forma, en general, de trasladar campos de vectores. Este problema lo vienen a solucionar, de forma satisfactoria, los campos de vectores relacionados por una aplicación diferenciable, siendo una de sus propiedades más importantes la de conservar el corchete de Lie de dos campos.

Definición 2.8 (Campos f-relacionados)
Sea $f: M \to N$ una aplicación diferenciable, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Se dice que X e Y están *f-relacionados*, y se denota por $X \sim_f Y$, si

$$df_p(X_p) = Y_{f(p)}$$

para todo punto $p \in M$.

El siguiente resultado nos proporciona un criterio para saber si dos campos están f-relacionados.

Proposición 2.9
Dos campos de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ están f-relacionados si, y sólo si, $X(g\circ f) = Y(g)\circ f$ para toda función $g \in \mathscr{C}^\infty(N)$.

Este criterio permite probar que el corchete de Lie se conserva mediante la f-relación. Más concretamente, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.10
Sean $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ *campos de vectores tales que* $X_i \sim_f Y_i$, $i = 1, 2$. *Entonces*

$$[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2].$$

En el caso especial en que f es un difeomorfismo, para cada campo de vectores X sobre M existe un único campo de vectores Y sobre N relacionado con X mediante f. En efecto, dado $q \in N$ existe un único punto $p \in M$ tal que $f(p) = q$. Basta definir $Y_q := df_p(X_p)$.

Finalizamos la sección con los campos de vectores sobre una variedad que son tangentes a una subvariedad de la misma, los cuales se caracterizan por la existencia de campos de vectores en la subvariedad que están j-relacionados con ellos, siendo j la inclusión canónica de la subvariedad en la variedad. Concretamente tenemos el siguiente resultado.

Definición 2.11 (Campo tangente a una subvariedad)
Sea P una subvariedad de M y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se dice que X es tangente a P si $X_p \in T_pP$ para todo punto $p \in P$.

Proposición 2.12
Sea P *una subvariedad de* M.
(1) *Si* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *es un campo de vectores tangente a* P *entonces su restricción* $X|_P$ *a* P *es un campo de vectores diferenciable sobre* P.
(2) *Si* $Y \in \mathfrak{X}(M)$ *es otro campo de vectores tangente a* P, *entonces* $[X,Y]|_P = [X|_P, Y|_P]$.

2.4. Curvas integrales: definiciones y resultados básicos

En el estudio de los campos de vectores hemos interpretado éstos de dos formas distintas. En primer lugar hemos visto los campos como aplicaciones (diferenciables) de la variedad en su fibrado tangente y, en segundo lugar, hemos probado que podían considerarse como derivaciones en el álgebra de las funciones diferenciables. En esta sección se interpretan los campos de vectores como ecuaciones diferenciales sobre la variedad.

Comenzamos definiendo lo que se entiende por curva integral de un campo X.

Definición 2.13 (Curva integral)
Una curva $\alpha : I \to M$ es una *curva integral* de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ si $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$ para todo $t \in I$.

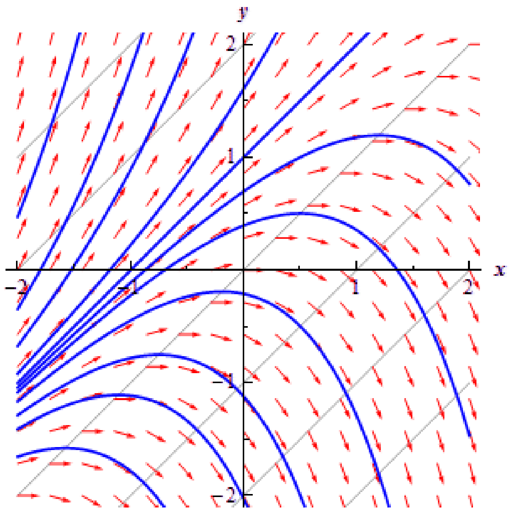
Se plantean ahora dos cuestiones importantes como son la existencia y unicidad de las curvas integrales, por un lado, y la búsqueda de métodos prácticos para su obtención, por otro, cuestiones que en realidad tendrán una solución común. Estos problemas se reducen, localmente, a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

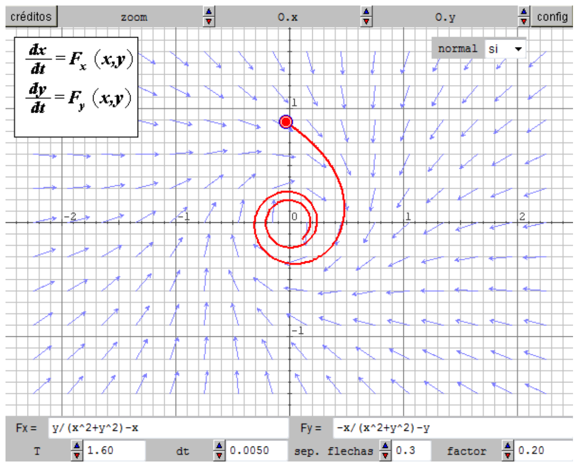
Sea (U, x) un sistema de coordenadas en M. Supongamos que la representante local de α en este sistema de coordenadas es $(x \circ \alpha)(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, y que el campo X se expresa localmente como

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $f_i = X(x_i) \in \mathscr{C}^\infty(U)$ para todo i. Si denotamos por $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a la representante en coordenadas de f_i, entonces α es una curva integral de X en U si, y sólo si,

$$\frac{du_i}{dt} = F_i(u_1(t), \ldots, u_n(t)), \quad i = 1, \ldots, n.$$





El teorema fundamental de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias permite obtener el siguiente resultado.

Proposición 2.14
Para todo campo de vectores diferenciable X y todo punto p en la variedad existe un intervalo del origen en $\mathbb{R}$ y una única curva integral del campo, definida en dicho intervalo y con punto inicial p.

Definición 2.15 (Punto crítico de un campo)
Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores diferenciable. Un punto $p \in M$ es un *punto crítico* de X si $X_p = 0$.

Definición 2.16 (Campo completo)
Un campo de vectores X es *completo* si todas sus curvas integrales están definidas en todo $\mathbb{R}$.

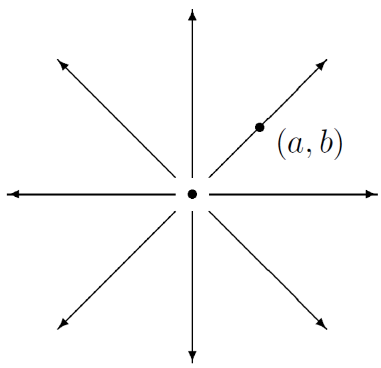
Ejemplo
Consideremos el campo de vectores de $\mathbb{R}^2$ definido en términos de la carta identidad (x_1, x_2) por

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Las curvas integrales de X están dadas por

$$\alpha(t) = (ae^t, be^t), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

y un esquema de todas las curvas integrales es el siguiente:



Observemos que el único punto crítico es el origen de coordenadas. Todas las curvas integrales están definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ por lo que el campo X es completo.

Ejemplo
Sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ dos constantes y consideremos el campo de vectores de $\mathbb{R}^2$ definido en términos de la carta identidad por

$$X = \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Las curvas integrales de X están dadas por

$$\alpha(t) = (ae^{\lambda_1 t}, be^{\lambda_2 t}), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Igual que en el ejemplo anterior, el campo X es completo y los puntos críticos son aquellos que satisfacen las ecuaciones $\lambda_1 x_1 = \lambda_2 x_2 = 0$.

Ejemplo
Consideremos el campo de vectores definido en términos de la carta identidad (x_1, x_2) por

$$X = \frac{1}{e^{\lambda x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1}, \ \lambda \neq 0.$$

Las curvas integrales de X están dadas por

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\lambda} \log(\lambda(t + \frac{1}{\lambda} e^{\lambda a})), b \right).$$

Consecuentemente, X no es un campo completo, ya que para ciertos valores de t, el argumento del logaritmo sería negativo.

Veamos a continuación dos resultados sencillos de demostrar pero que nos serán muy útiles mas adelante.

Proposición 2.17
Sea $\alpha : J \to M$ una curva integral de un campo X y sea $t_0 \in J$. Entonces la curva $\beta : I \to M$, $\beta(t) = \alpha(t + t_0)$, definida en $I = \{t \mid t + t_0 \in J\}$, es una curva integral de X.

Proposición 2.18
Si $\alpha, \beta : I \to M$ son dos curvas integrales de X, definidas en un intervalo conexo I, tal que $\alpha(a) = \beta(a)$ para algún $a \in I$, entonces $\alpha = \beta$.

Si consideramos todas las curvas integrales del campo X con punto inicial p, dado que dos cualesquiera de ellas coinciden en la intersección de sus dominios, podemos definir la curva integral maximal de X con punto inicial p, cuyo dominio de definición es el mayor posible. En particular, si el dominio de todas las curvas integrales maximales de un campo es $\mathbb{R}$, dicho campo es completo. La curva integral maximal de un campo X que empieza en un punto p es única en el siguiente sentido.

Proposición 2.19
Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ y $\alpha_p : I_p \to M$ la curva integral maximal de X que empieza en p. Si $q = \alpha_p(s)$ entonces $I_q = I_p - s$ y $\alpha_q(t) = \alpha_p(s + t)$ para $t \in I_q$.

El resultado anterior implica que la completitud de un campo de vectores es equivalente a la existencia de un intervalo del origen en $\mathbb{R}$ en el cual están definidas todas las curvas integrales maximales. Como consecuencia de esta caracterización se tiene que todo campo de vectores con soporte compacto es completo y, en particular, todo campo definido sobre una variedad compacta es completo.

Proposición 2.20
(1) *$X \in \mathfrak{X}(M)$ es completo si, y sólo si, existe un entorno I de 0 en $\mathbb{R}$ tal que cada curva integral maximal de X está definida en I.*
(2) *Todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ sobre una variedad compacta es completo.*

Para finalizar esta sección vamos a dar un resultado sobre cómo pueden ser las curvas integrales. Antes introduciremos algunos conceptos.

Definición 2.21 (Curva periódica)
Sea $\gamma : \mathbb{R} \to M$ una curva diferenciable.
(1) γ es *periódica* si existe un número $c > 0$ tal que $\gamma(t) = \gamma(t+c)$ para todo t. Si c es el menor número positivo satisfaciendo dicha propiedad, se dice que c es el *periodo* de γ.
(2) Si γ es una curva periódica, de periodo c, e inyectiva en algún intervalo $[a, a+c)$, entonces γ se dice que es *simplemente periódica*.

Proposición 2.22 (Clasificación de la curvas integrales maximales)
Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$. Todas las curvas integrales maximales de X son inyectivas, simplemente periódicas o constantes.

2.5. El flujo de un campo

Ligado al concepto de campo de vectores se encuentra el de flujo del campo, que determina el grupo local uniparamétrico de transformaciones $\{\Psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ asociado al campo de vectores X, donde Ψ_t está definido en un cierto subconjunto dependiente de t, y es tal que si p es un punto de M entonces $\Psi_t(p)$ es el valor en t de la curva integral maximal de X con punto inicial p. En otras palabras, Ψ_t nos describe la posición de cada punto de su dominio en el instante t; es como una fotografía de una parte de M tomada justo en el instante t. Estas aplicaciones nos permiten caracterizar a los campos de vectores completos como aquellos para los que las transformaciones Ψ_t están definidas en todo M.

Sea $D = \{(t, p) \in \mathbb{R} \times M \mid t \in I_p\}$. Se define el *flujo* de X como la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Psi : D & \to & M \\ (t,p) & \to & \Psi(t,p) := \alpha_p(t). \end{array}$$

Consideremos $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores completo. A partir del flujo se pueden obtener dos tipos de funciones:

(1) Para cada $p \in M$, la aplicación $\Psi_p : \mathbb{R} \to M$ definida por $\Psi_p(t) := \Psi(t, p)$ no es más que la curva integral maximal de X que sale de p y, por tanto, nos describe la trayectoria del punto p a lo largo del tiempo t.

(2) Para cada $t \in \mathbb{R}$, la aplicación $\Psi_t : M \to M$ definida por $\Psi_t(p) := \Psi(t, p)$ nos proporciona la posición de cada punto de M en el instante t. Por esta razón, Ψ_t se denomina el *estado t del flujo* Ψ, y en ocasiones el conjunto $\{\Psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ se dirá que es el flujo del campo X.

Proposición 2.23 (Grupo uniparamétrico de transformaciones)
Si $\{\Psi_t\}_t$ es el flujo de un campo de vectores completo X, entonces se cumple lo siguiente:
(1) $\Psi_0 = 1$.
(2) $\Psi_s \circ \Psi_t = \Psi_{s+t}$*, para todo $s, t \in \mathbb{R}$ (es decir, los estados de Ψ conmutan).*
(3) Ψ_t *es un difeomorfismo con* $\Psi_t^{-1} = \Psi_{-t}$.
Por verificar estas propiedades, $\{\Psi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ se dice que es un grupo uniparamétrico de transformaciones *(o difeomorfismos).*

Como una aplicación del flujo de un campo, puede probarse el siguiente resultado.

Proposición 2.24
Dado un campo de vectores diferenciable X y un punto p de M tal que $X_p \neq 0$, existe un entorno del punto y una carta local de la variedad definida en dicho entorno tal que si $(x_1, \ldots, x_n)$ son las funciones coordenadas correspondientes a dicha carta, entonces $X = \partial/\partial x_1$ en los puntos del entorno.

Los grupos uniparamétricos de transformaciones nos permiten dar una interpretación geométrica del corchete de dos campos de vectores X e Y como la derivada (de Lie) de Y con respecto a X. Concretamente, dado un punto p de M, si $\{\Psi_t\}_t$ es el grupo local uniparamétrico de transformaciones asociado a X, podemos considerar el valor de Y en $\Psi_t(p)$, $Y_{\Psi_t(p)}$, que será un vector tangente a M en $\Psi_t(p)$, y trasladarlo a T_pM mediante a aplicación $d\Psi_{-t}$. Se obtiene así la aplicación diferenciable $d\Psi_{-t}(Y_{\Psi_t(p)})$ definida en un entorno del origen en $\mathbb{R}$ y con valores en T_pM, cuya derivada en el origen resulta ser $[X,Y]_p$. En otras palabras, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.25
Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ y Ψ el flujo local de X en un entorno de p. Entonces

$$[X,Y]_p = \lim_{p \to 0} \frac{1}{t} \left(d\Psi_{-t}(Y_{\Psi_t(p)}) - Y_p \right).$$

2.6. Uno-formas: definiciones y resultados básicos

Definición 2.26 (1-forma)
Una 1-forma (o uno-forma) θ sobre una variedad diferenciable M es una correspondencia que asigna a cada punto $p \in M$ un covector $\theta_p \in T_p^*M$.

En otras palabras, si $\pi^* : TM^* \to M$ es la proyección canónica del fibrado cotangente en M, entonces una 1-forma es una aplicación $\theta : M \to TM^*$ tal que $\pi^* \circ \theta = 1_M$. La 1-forma se dice *diferenciable* si lo es como aplicación diferenciable de M en TM^*. El conjunto de las 1-formas diferenciables será denotado por $\mathfrak{X}^*(M)$.

Por otra parte, toda 1-forma puede interpretarse, de una manera natural, como una aplicación entre el conjunto de los campos de vectores diferenciables $\mathfrak{X}(M)$ y el conjunto de las funciones reales, lo que nos conduce a caracterizar las 1-formas diferenciables θ como aquellas para las que $\theta(X)$ es una función diferenciable, siempre que X sea un campo de vectores diferenciable. Es decir:

Proposición 2.27
Sea M una variedad diferenciable. Una 1-forma θ es diferenciable si, y sólo si, $\theta(X) \in \mathscr{C}^\infty(M)$ para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

En el conjunto de las 1-formas diferenciables sobre M podemos definir dos operaciones naturales, la suma y el producto por funciones diferenciables, del siguiente modo:

Suma: Si θ, $\omega \in \mathfrak{X}^*(M)$ entonces $\theta + \omega : \mathfrak{X}(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ está definida por

$$(\theta + \omega)(X) : M \to \mathbb{R}, \quad (\theta + \omega)(X)(p) = \theta_p(X_p) + \omega_p(X_p).$$

Producto: Si $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ y $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ entonces $f\theta : \mathfrak{X}(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ está definida por

$$(f\theta)(X) : M \to \mathbb{R}, \quad (f\theta)(X)(p) = f(p)\theta_p(X_p).$$

Con las dos operaciones anteriores, el conjunto $\mathfrak{X}^*(M)$ admite estructura de módulo sobre el anillo $\mathscr{C}^\infty(M)$ de las funciones diferenciables.

2.7. La diferencial de una función

Entre los covectores tangentes existen unos que son especiales, y son aquellos que provienen de una función diferenciable. Si $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y p es un punto de M, podemos pensar en la aplicación diferencial df_p como un covector en p, después de hacer la natural identificación entre el espacio tangente $T_{f(p)}\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$. Esta interpretación nos permite considerar la 1-forma df, que a cada punto p le asocia la aplicación diferencial df_p, y que se denomina la diferencial de f. El siguiente resultado se demuestra con facilidad.

Proposición 2.28 (La 1-forma diferencial)
Sea M una variedad diferenciable y $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ una función diferenciable. Entonces df es una 1-forma diferenciable.

Sea (U,x) un sistema de coordenadas y consideremos θ una 1-forma diferenciable. Es fácil ver que, en el abierto U, se tiene la siguiente igualdad:

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \theta\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) dx_i.$$

Por tanto, las componentes de θ son las funciones $\theta_i = \theta(\frac{\partial}{\partial x_i})$. En particular, la diferencial de una función diferenciable f puede escribirse como

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Esta manera de construir 1-formas nos conduce a definir una aplicación d entre las funciones diferenciables $\mathscr{C}^\infty(M)$ y las 1-formas diferenciables $\mathfrak{X}^*(M)$, denominada la *aplicación diferencial* y que posee interesantes propiedades.

Proposición 2.29 (La aplicación diferencial)
(1) *$d : \mathscr{C}^\infty(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ es $\mathbb{R}$-lineal.*
(2) *Si $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$, entonces $d(fg) = gdf + fdg$.*
(3) *Si $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ y $h \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ entonces $d(h \circ f) = h'(f)df$.*

2.8. Campos de tensores: definiciones y resultados básicos

Los campos de tensores sobre una variedad diferenciable son a los tensores sobre un espacio vectorial (las aplicaciones multilineales) lo que un campo de vectores es a un vector tangente. Así pues, comenzamos la lección recordando lo que se entiende por un tensor sobre un espacio vectorial, que tiene como casos particulares y distinguidos a los covectores y las formas bilineales.

Introducimos a continuación los campos tensoriales de tipo (r,s) sobre una variedad M como las aplicaciones $\mathscr{C}^\infty(M)$-multilineales de $\mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s$ en $\mathscr{C}^\infty(M)$. Cuando $r = 0$ se tienen los tensores covariantes de orden s y en el caso $s = 0$ aparecen los tensores contravariantes de orden r. Más explícitamente:

Definición 2.30 (Campo tensorial covariante y contravariante)

(1) Un campo tensorial A de tipo (r,s) sobre una variedad M es una aplicación $\mathscr{C}^\infty(M)$-multilineal $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathscr{C}^\infty(M)$. El conjunto de los tensores de tipo (r,s) se denotará por $\mathscr{T}_s^{\,r}(M)$.

(2) Un *campo tensorial covariante* de orden s sobre una variedad M es una aplicación $\mathscr{C}^\infty(M)$-multilineal $A : \mathfrak{X}(M)^s \to \mathscr{C}^\infty(M)$.

(3) Un *campo tensorial contravariante* de orden r sobre una variedad M es una aplicación $\mathscr{C}^\infty(M)$-multilineal $A : \mathfrak{X}^*(M)^r \to \mathscr{C}^\infty(M)$.

Ejemplo

(1) Sea la aplicación $E : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ dada por $E(\theta, X) = \theta(X)$. Es fácil ver que E es un tensor de tipo (1,1). E se denomina el *tensor evaluación*.

(2) Toda 1-forma θ puede considerarse un tensor de tipo (0,1).

(3) Todo campo de vectores diferenciable puede interpretarse como un tensor de tipo (1,0), considerando $X : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ definido por $X(\theta) = \theta(X)$. En otras palabras, se trata de identificar $\mathfrak{X}(M)$ con su módulo bidual $\mathfrak{X}(M)^{**}$.

(4) Sea una 1-forma no nula $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ y definamos $F : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$ por $F(X,Y) = X(\theta(Y))$. Entonces es fácil ver que F no es un tensor; ¿qué propiedad falla?

Cuando disponemos de varios tensores los podemos operar de diversas maneras. Las operaciones disponibles son las siguientes:

Suma: Sean $A, B \in \mathscr{T}_s^r(M)$, entonces $A + B : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathscr{C}^\infty(M)$ se define como sigue:

$$(A+B)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) + B(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s).$$

Es fácil ver que $A + B \in \mathscr{T}_s^r(M)$.

Producto por funciones: Sea $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$ y $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Definimos $fA : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \to \mathscr{C}^\infty(M)$ por

$$(fA)(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) = f \cdot A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s).$$

Es fácil ver que $fA \in \mathscr{T}_s^r(M)$.

Producto: Mientras que sólo se pueden sumar dos tensores del mismo tipo, podemos realizar el producto de dos tensores de cualquier tipo. Sean $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$ y $B \in \mathscr{T}_{s'}^{r'}(M)$. Definimos $A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \to \mathscr{C}^\infty(M)$ por

$$(A \otimes B)(\theta^1, \ldots, \theta^{r+r'}, X_1, \ldots, X_{s+s'}) = A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s) \cdot B(\theta^{r+1}, \ldots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \ldots, X_{s+s'}).$$

Es fácil probar que $A \otimes B \in \mathscr{T}_{s+s'}^{r+r'}(M)$. La operación $\otimes$ se denomina *producto tensorial*.

Como toda función diferenciable f puede considerarse un tensor de tipo (0,0), entonces si $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$ se tiene que

$$f \otimes A = A \otimes f = fA.$$

Finalizamos este apartado con el siguiente resultado, cuya demostración es un mero ejercicio de manipulación algebraica.

Proposición 2.31
(1) *El producto tensorial $\otimes$ es $\mathscr{C}^\infty(M)$-bilineal.*
(2) *El producto tensorial $\otimes$ es asociativo y no conmutativo.*
(3) *Si $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$, $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$ y $B \in \mathscr{T}_{s'}^{r'}(M)$, entonces*

$$f(A \otimes B) = (fA) \otimes B = A \otimes (fB).$$

Ejercicio
Demuestra, con un ejemplo, que el producto tensorial no es conmutativo.

2.9. Tensores en un punto

Si V es un espacio vectorial y V^* denota el espacio vectorial dual, entonces los tensores de tipo (r,s) sobre V son las aplicaciones multilineales $t : V^{*r} \times V^s \to \mathbb{R}$. En esta sección vamos a probar que todo campo tensorial sobre una variedad diferenciable M puede interpretarse como una aplicación que asigna a cada punto p de M un tensor en su espacio tangente.

Dado un espacio vectorial V, denotamos por $T_s^r V$ el conjunto de las aplicaciones multilineales de tipo (r,s), $t : V^{*r} \times V^s \to \mathbb{R}$. Es fácil ver que $T_s^r V$ es un espacio vectorial de dimensión n^{r+s}, siendo n la dimensión de V (¡Demuéstralo!). Consideremos ahora M una variedad diferenciable n-dimensional, y definamos el siguiente conjunto:

$$T_s^r M = \bigcup_{p\in M} T_s^r(T_pM) \equiv \{(p,t) \mid p \in M,\ t \in T_s^r(T_pM)\}.$$

No es difícil probar el siguiente resultado.

Proposición 2.32
El conjunto $T_s^r M$ admite estructura de variedad diferenciable de dimensión $n + n^{r+s}$. Con esta estructura diferenciable, $T_s^r M$ se denomina el fibrado tensorial de tipo (r,s) sobre M.

Como casos particulares se obtienen los fibrados tangente TM y cotangente T^*M.

Lema 2.33
Sea $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$. Si cualquiera de las uno formas θ^i o de los campos X_j es igual a cero en un punto $p \in M$, entonces

$$A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)(p) = 0.$$

Como consecuencia de este lema es fácil deducir la siguiente propiedad.

Proposición 2.34
Sea $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$. Sean uno formas θ^i, ω^i, $i = 1,\ldots,r$, y campos de vectores X_j, Y_j, $i = 1,\ldots,s$, tales que $\theta^i(p) = \omega^i(p)$ y $X_j(p) = Y_j(p)$ para un punto $p \in M$. Entonces

$$A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)(p) = A(\omega^1,\ldots,\omega^r,Y_1,\ldots,Y_s)(p).$$

En virtud de este resultado, si $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$ podemos definir para cada punto p de M una aplicación multilineal $A_p \in T_s^r(T_pM)$. En efecto, si $\alpha^1,\ldots,\alpha^r \in T_p^*M$ y $v_1,\ldots,v_s \in T_pM$, se define la aplicación $A_p : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \to \mathbb{R}$ por la siguiente fórmula:

$$A_p(\alpha^1,\ldots,\alpha^r,v_1,\ldots,v_s) = A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)(p),$$

donde las uno formas θ^i y los campos X_j son extensiones globales de los covectores α^i y de los vectores v_j, respectivamente. Pero, ¿cómo podemos construir tales extensiones?

Extensiones globales de un vector (o de un covector)

Sea (U,x) un entorno coordenado de M que contiene al punto p. Si $v \in T_pM$, entonces

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$

para ciertas constantes a_i. Consideremos el campo $X' \in \mathfrak{X}(U)$ definido por

$$X' = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Sea $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$ una función salto en p con soporte contenido en U. Entonces podemos definir una extensión global $X \in \mathfrak{X}(M)$ del vector v como sigue:

$$X(q) = \begin{cases} f(q)X'_q & \text{si } q \in U \\ 0 & \text{si } q \notin \operatorname{sop}(f) \end{cases}$$

De manera totalmente análoga se puede extender un covector $\alpha \in T_p^*M$ a una uno forma θ.

Ejercicio
Justifica que X es, efectivamente, un campo de vectores diferenciable.

Ahora podemos interpretar un tensor $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$ como una aplicación diferenciable $A : M \to T_s^r M$ tal que $\pi_s^r \circ A = 1$, donde $\pi_s^r : T_s^r M \to M$ denota la proyección canónica del fibrado tensorial de tipo (r,s) sobre la variedad diferenciable M.

2.10. Las componentes tensoriales

En esta sección vamos a generalizar a campos tensoriales las ecuaciones que nos daban las componentes de un campo de vectores o de una uno forma en función de la bases canónicas asociadas a un sistema de coordenadas. Surgen, de este modo, las componentes tensoriales, que identifican unívocamente el campo tensorial del que proceden y permiten dar, al mismo tiempo, la interpretación clásica de los tensores en coordenadas.

Definición 2.35 (Componentes de un tensor)
Sea $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$ y (U,x) un sistema de coordenadas en M. Las *componentes* de A respecto de (U,x) son las funciones

$$A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = A(dx^{i_1},\ldots,dx^{i_r},\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_s}}) \in \mathscr{C}^\infty(U),$$

con todos los índices variando de 1 a n.

A continuación, y con el fin de relacionar el concepto de tensor con el clásico por coordenadas, conviene indicar cómo son operados los tensores en coordenadas, y así se calcularán las componentes del tensor suma, del tensor producto tensorial y del tensor producto por una función diferenciable.

Proposición 2.36 (Operaciones tensoriales en coordenadas)
Sean A y B tensores sobre M y $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$. Entonces:

(1) $(A+B)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} + B^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$.

(2) $(fA)^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} = fA^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$.

(3) $(A\otimes B)^{i_1\cdots i_{r+r'}}_{j_1\cdots j_{s+s'}} = A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} B^{i_{r+1}\cdots i_{r+r'}}_{j_{s+1}\cdots j_{s+s'}}$

Como consecuencia de la definición de componentes de un tensor se tiene la siguiente propiedad.

Proposición 2.37
Sea $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$ y (U,x) un sistema de coordenadas en M. Entonces se satisface lo siguiente:

$$A|_U = \sum A^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes\cdots\otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$$

donde cada índice va sumado de 1 a n.

2.11. La contracción de un tensor

No obstante, una de las operaciones más destacables que podemos hacer con los tensores es la contracción, la cual transforma tensores de tipo (r,s) en tensores de tipo $(r-1,s-1)$, y cuya definición general deriva del caso especial denominado contracción $(1,1)$, que transforma tensores de ese tipo en funciones diferenciables.

Lema 2.38 (La contracción (1,1))
Existe una única aplicación $\mathscr{C}^\infty(M)$-lineal $C : \mathscr{T}_1^{\,1}(M) \to \mathscr{C}^\infty(M)$, denominada contracción (1,1), *tal que*

$$C(X \otimes \theta) = \theta(X),$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$.

Generalicemos ahora la aplicación contracción para tensores arbitrarios. Sea $A \in \mathscr{T}_s^{\,r}(M)$ y consideremos dos índices $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$. Se define $C_j^i A \in \mathscr{T}_{s-1}^{\,r-1}(M)$ como sigue:

$$(C_j^i A)(\theta^1,\ldots,\theta^{r-1},X_1,\ldots,X_{s-1}) = C\{A(\theta^1,\ldots,\bullet,\ldots,\theta^{r-1},X_1,\ldots,\bullet,\ldots,X_{s-1})\},$$

donde $A(\theta^1,\ldots,\bullet,\ldots,\theta^{r-1},X_1,\ldots,\bullet,\ldots,X_{s-1})$ es el tensor de tipo (1,1) definido por

$$(\theta,X) \to A(\theta^1,\ldots,\theta,\ldots,\theta^{r-1},X_1,\ldots,X,\ldots,X_{s-1}).$$

Proposición 2.39
Sea $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$ y $A \in \mathscr{T}_s^{\,r}(M)$. Si las componentes de A relativas a un sistema de coordenadas son $A_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}$, entonces las componentes de $C_j^i A$ son

$$\sum_m A_{j_1\ldots \underset{\downarrow \text{lugar } j\text{-ésimo}}{m} \ldots j_s}^{i_1\ldots \overset{\uparrow \text{lugar } i\text{-ésimo}}{m} \ldots i_r}.$$

Si pensamos en un tensor A de tipo $(1,1)$ como una correspondencia que a cada punto p le asigna un operador lineal A_p sobre T_pM, entonces la contracción $(1,1)$ sobre A es la función diferenciable que a cada punto le asocia la traza del operador A_p.

Ejercicio
Haz los detalles de la anterior interpretación de la contracción (1,1).

2.12. El pullback/pushforward de un tensor mediante una aplicación

Un hecho básico de los covectores, que se generaliza a cualquier tensor de orden covariante $s > 0$, es que toda aplicación lineal entre espacios vectoriales V y W induce una aplicación lineal entre los espacios $\mathscr{T}_s^{\,0}(V)$ y $\mathscr{T}_s^{\,0}(W)$. En exacta analogía, cualquier aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$ entre dos variedades diferenciables induce una aplicación $f^* : \mathscr{T}_s^{\,0}(N) \longrightarrow \mathscr{T}_s^{\,0}(M)$ que a cada tensor covariante A sobre N le asigna un tensor del mismo orden sobre M, $f^*(A)$, que se denomina el pullback de A mediante f.

Proposición 2.40 (El pullback de un tensor)
Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable y $A \in \mathscr{T}_s^{\,0}(N)$, $s \geq 1$, un tensor covariante. Pongamos

$$(f^*A)_p(v_1,\ldots,v_s) = A_{f(p)}(df_p(v_1),\ldots,df_p(v_s))$$

para todo punto $p \in M$, $v_i \in T_pM$. Entonces $f^*A \in \mathscr{T}_s^{\,0}(M)$ y se denomina el pullback *de A mediante f.*

Así pues, fijada una aplicación diferenciable f, la asignación que a cada tensor le asocia su pullback mediante f permite definir la operación pullback, la cual posee unas propiedades interesantes, entre las que podemos destacar las siguientes.

Proposición 2.41 (Propiedades del pullback)
Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable y consideremos la aplicación pullback $f^* : \mathscr{T}_s^0(N) \to \mathscr{T}_s^0(M)$. Entonces se cumple:
(1) *f^* es $\mathbb{R}$-lineal.*
(2) *f^* se comporta de manera natural respecto del producto tensorial, i.e., $f^*(A \otimes B) = f^*(A) \otimes f^*(B)$.*
(3) *El pullback conserva la composición de aplicaciones, ya que si $g : N \to P$ es otra aplicación entre variedades, entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Una operación de propiedades similares al pullback es el pushforward de un tensor mediante una aplicación $f : M \longrightarrow N$, a la cual hay que exigirle en este caso que sea un difeomorfismo. Esta operación traslada tensores sobre M en tensores sobre N del mismo tipo.

Proposición 2.42 (El pushforward de un tensor)
Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo y $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$, $r, s \geq 0$. Pongamos

$$(f_*A)_q(\alpha^1, \ldots, \alpha^r, v_1, \ldots, v_s) = A_p(df_p^*(\alpha^1), \ldots, df_p^*(\alpha^r) df_q^{-1}(v_1), \ldots, df_q^{-1}(v_s)),\ p = f^{-1}(q),$$

para todo punto $q \in N$, $\alpha^i \in T_q^*N$, $v_i \in T_qN$, donde df_p^* es la aplicación lineal transpuesta. Entonces $f_*A \in \mathscr{T}_s^r(N)$ y se denomina el pushforward *de A mediante f.*

Teniendo en cuenta el resultado anterior podemos construir una aplicación f_* que satisface las siguientes propiedades.

Proposición 2.43 (Propiedades del pushforward)
Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo y consideremos la aplicación pushforward $f_* : \mathscr{T}_s^r(M) \to \mathscr{T}_s^r(N)$. Entonces se cumple:
(1) *f_* es un isomorfismo lineal.*
(2) *f_* se comporta de manera natural respecto al producto tensorial, i.e., $f_*(A \otimes B) = f_*(A) \otimes f_*(B)$.*
(3) *El pushforward conserva la composición de aplicaciones, ya que si $g : N \to P$ es otra aplicación entre variedades, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

FIN DEL CAPÍTULO 2