Capítulo 3

Derivaciones tensoriales y formas diferenciales

CONTENIDOS. Definición de derivación tensorial. Interpretación como derivación sobre el álgebra de los campos de tensores diferenciables. El producto conmutador o corchete de dos derivaciones tensoriales. El álgebra de Lie de las derivaciones tensoriales. Carácter local de las derivaciones. La regla del producto. Construcción de derivaciones tensoriales. La derivada de Lie. Tensores simétricos y antisimétricos sobre un espacio vectorial. Formas. Los operadores simetrización y antisimetrización. Producto exterior de formas. El álgebra exterior o álgebra de Grassmann sobre un espacio vectorial. Campos de tensores simétricos y antisimétricos. Formas sobre una variedad. El producto exterior de formas diferenciales. El álgebra exterior sobre una variedad. Homomorfismo inducido por una aplicación diferenciable. La diferencial exterior de una variedad: existencia y unicidad local, globalización. Derivaciones y antiderivaciones sobre el álgebra exterior de una variedad. La diferencial exterior y el pullback. El producto interno. La derivada de Lie de formas diferenciales.

3.1. Definición y primeros resultados

Definimos en esta sección lo que se entiende por una derivación tensorial $\mathscr{D}$ sobre una variedad diferenciable M, que es un conjunto de funciones $\mathbb{R}$-lineales $\mathscr{D}^r_s$ de los tensores de tipo (r,s) en los tensores del mismo tipo, tales que satisfacen la regla de Leibnitz del producto y conmutan con las contracciones. En el caso especial en que $r=s=0$, entonces se trata de una derivación sobre las funciones diferenciables y, en consecuencia, proviene de un único campo de vectores diferenciable. Más precisamente:

Definición 3.1 (Derivación tensorial)
Una *derivación tensorial* $\mathscr{D}$ sobre una variedad M es un conjunto de aplicaciones $\mathbb{R}$-lineales

$$\mathscr{D}=\mathscr{D}^r_s : \mathscr{T}^r_s(M)\to\mathscr{T}^r_s(M), \quad r,s\geq 0,$$

tales que para cualesquiera tensores A y B se tiene:
(1) $\mathscr{D}(A\otimes B)=\mathscr{D}A\otimes B+A\otimes\mathscr{D}B$.
(2) $\mathscr{D}(CA)=C(\mathscr{D}A)$, para cualquier contracción C.

3.1.1. El álgebra de Lie de las derivaciones

Proposición 3.2 (El producto conmutador o corchete)
Si $\mathscr{D}_1$ y $\mathscr{D}_2$ son derivaciones tensoriales, entonces $[\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2]$ es una derivación tensorial, donde

$$[\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2](A) = \mathscr{D}_1(\mathscr{D}_2(A)) - \mathscr{D}_2(\mathscr{D}_1(A)).$$

La derivación $[\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2]$ se denomina el producto conmutador *o* corchete *de las derivaciones $\mathscr{D}_1$ y $\mathscr{D}_2$.*

Consideremos el conjunto $\mathscr{D}(M)$ de todas las derivaciones tensoriales sobre la variedad M. En dicho conjunto podemos definir las siguientes tres operaciones:

Suma: $(\mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2)(A) = \mathscr{D}_1(A) + \mathscr{D}_2(A)$.

Producto por funciones: $(f \cdot \mathscr{D}_1)(A) = f \cdot \mathscr{D}_1(A)$.

Corchete: $[\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2](A) = \mathscr{D}_1(\mathscr{D}_2(A)) - \mathscr{D}_2(\mathscr{D}_1(A))$.

El siguiente resultado es directo. La propiedad más laboriosa de demostrar es la *identidad de Jacobi*:

$$[[\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2], \mathscr{D}_3] + [[\mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3], \mathscr{D}_1] + [[\mathscr{D}_3, \mathscr{D}_1], \mathscr{D}_2] = 0.$$

Proposición 3.3 (El álgebra de Lie de las derivaciones)
El conjunto $\mathscr{D}(M)$ de todas las derivaciones tensoriales sobre la variedad M, con las operaciones anteriores, admite estructura de álgebra de Lie.

3.1.2. Regla del producto

Un resultado interesante es aquél que nos da la fórmula de la derivación tensorial de un tensor a partir de la derivación de campos de vectores y uno formas, de lo que se deduce que si dos derivaciones coinciden sobre los campos de vectores y sobre las uno formas entonces son iguales.

Proposición 3.4
Sea $\mathscr{D}$ una derivación tensorial sobre M y $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)) \;=\;& (\mathscr{D}A)(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)\\ &+\sum_{i=1}^{r} A(\theta^1,\ldots,\mathscr{D}\theta^i,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,X_s)\\ &+\sum_{j=1}^{s} A(\theta^1,\ldots,\theta^r,X_1,\ldots,\mathscr{D}X_j,\ldots,X_s)\end{aligned}$$

Como un caso particular de la proposición que acabamos de enunciar, si θ es una uno-forma sobre M podemos deducir la siguiente expresión para su derivada tensorial:

$$(\mathscr{D}\theta)(X) = \mathscr{D}(\theta X) - \theta(\mathscr{D}X).$$

Por tanto, basta conocer cómo actúa $\mathscr{D}$ sobre las funciones y los campos de vectores. En otras palabras,

Corolario 3.5
Si dos derivaciones tensoriales $\mathscr{D}_1$ y $\mathscr{D}_2$ sobre M coinciden sobre las funciones diferenciables y los campos de vectores entonces $\mathscr{D}_1 = \mathscr{D}_2$.

3.1.3. Construcción de derivaciones tensoriales

Una consecuencia destacable del Corolario 3.5 es que nos da la pista para construir derivaciones tensoriales:

Teorema 3.6
Sea un campo de vectores V y una función $\delta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ $\mathbb{R}$-lineal, satisfaciendo

$$\delta(fX) = V(f)X + f\delta(X).$$

Entonces existe una única derivación que coincide con V actuando sobre las funciones diferenciables y con δ actuando sobre los campos de vectores.

3.1.4. Carácter local de las derivaciones

Las derivaciones tensoriales no son, en general, $\mathscr{C}^\infty(M)$-lineales. Por este motivo, el valor del tensor $\mathscr{D}A$ en un punto p de M no puede obtenerse sólo a partir de A_p, esto es, del valor de A en p. Sin embargo, $(\mathscr{D}A)(p)$ depende de los valores de A en un entorno arbitrariamente pequeño de p, lo cual nos recuerda la conocida propiedad relativa a la diferencial de funciones diferenciables.

El carácter local de las derivaciones puede expresarse diciendo que la derivación tensorial conmuta con la restricción a abiertos de la variedad. Más precisamente, podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 3.7
Si $\mathscr{D}$ es una derivación tensorial sobre M y $U \subset M$ es un abierto, entonces existe una única derivación tensorial $\mathscr{D}_U$ sobre U tal que

$$\mathscr{D}_U(A|_U) = (\mathscr{D}A)|_U$$

para cualquier tensor A sobre M. $\mathscr{D}_U$ se denomina la restricción de $\mathscr{D}$ a U.

3.2. La derivada de Lie

Como una de las aplicaciones más importantes del Teorema 3.6 podemos citar la construcción de la derivada de Lie.

Proposición 3.8 (La derivada de Lie respecto de un campo)
Sea V un campo de vectores diferenciable y consideremos la aplicación diferenciable $\delta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por $\delta(X) = [V,X]$. Entonces existe una única derivación tensorial $\mathscr{L}_V$ sobre M tal que $\mathscr{L}_V(f) = V(f)$ sobre las funciones diferenciables y $\mathscr{L}_V(X) = [V,X]$ sobre los campos de vectores. $\mathscr{L}_V$ se denomina la derivada de Lie respecto de V.

Podemos, pues, construir un operador $\mathscr{L}$ definido sobre $\mathfrak{X}(M)$ y con valores en $\mathscr{D}(M)$, que a cada campo V le asigna la derivada de Lie respecto de V, y que se denomina la derivada de Lie:

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}: & \mathfrak{X}(M) & \to & \mathscr{D}(M) \\ & V & \to & \mathscr{L}_V \end{array}$$

La aplicación $\mathscr{L}$ así definida satisface las siguientes propiedades.

Proposición 3.9 (Propiedades de la derivada de Lie)
(1) $\mathscr{L}_{aV+bW} = a\mathscr{L}_V + b\mathscr{L}_W,\ a,b \in \mathbb{R}$.
(2) $[\mathscr{L}_V, \mathscr{L}_W] = \mathscr{L}_{[V,W]}$.
(3) $\mathscr{L}_V(df) = d(Vf)$.

3.2.1. Relación de las derivaciones tensoriales con la derivada de Lie

Si $B \in \mathscr{T}_1^1(M)$ es un tensor de tipo (1,1) sobre M e interpretamos B como una aplicación $\mathscr{C}^\infty(M)$-lineal $B : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, entonces existe una única derivación tensorial $\mathscr{D}_B$ tal que $\mathscr{D}_B(f) = 0$ y $\mathscr{D}_B(X) = B(X)$. Por otra parte, si $\mathscr{D}$ es una derivación tal que $\mathscr{D}_0^1$ es una aplicación $\mathscr{C}^\infty(M)$-lineal, entonces $\mathscr{D}_0^1$ puede interpretarse como un tensor B de tipo (1,1), y por este motivo la derivación la denotaremos por $\mathscr{D}_B$. Esta familia de derivaciones nos permite probar que la derivada de Lie forma parte de cualquier derivación. En efecto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.10
Dada una derivación arbitraria $\mathscr{D}$, existe un único campo de vectores V y un único tensor B de tipo (1,1) tal que la derivación se descompone como $\mathscr{D} = \mathscr{L}_V + \mathscr{D}_B$.

3.3. Tensores simétricos y antisimétricos

Para tensores covariantes (o contravariantes) de orden al menos 2, pueden definirse unas subclases especiales que juegan un papel destacado en el cálculo tensorial. Nos estamos refiriendo, como es natural, a los tensores simétricos y a los tensores antisimétricos o alternados.

Definición 3.11 (Tensor simétrico y tensor antisimétrico)
Sea $A \in \mathscr{T}_s^0(M)$ y σ una permutación de orden s con signatura ε_σ, $s \geq 2$.
(1) A es *simétrico* si $A(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(s)}) = A(X_1, \ldots, X_s)$.
(2) A es *antisimétrico* si $A(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(s)}) = \varepsilon_\sigma A(X_1, \ldots, X_s)$.

Teniendo en cuenta que toda permutación se puede expresar como un producto de trasposiciones, entonces no es difícil probar que un tensor es simétrico si la trasposición de cualesquiera dos de sus argumentos deja inalterado su valor, y es antisimétrico si cada trasposición de argumentos produce un cambio de signo.

3.3.1. Relación del pullback/pushforward con los tensores simétricos/antisimétricos

En este sentido, otras de las propiedades fundamentales tanto de la operación pullback como de la operación pushforward es que aplica tensores simétricos (respectivamente, antisimétricos) en tensores simétricos (respectivamente, antisimétricos).

Proposición 3.12
Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable y consideremos la aplicación pullback $f^* : \mathscr{T}_s^0(N) \to \mathscr{T}_s^0(M)$. Si $A \in \mathscr{T}_s^0(N)$ es simétrico (resp. antisimétrico) entonces $f^*(A)$ es también simétrico (resp. antisimétrico).

Proposición 3.13
Sea $f : M \to N$ un difeomorfismo y consideremos la aplicación pushforward $f_* : \mathscr{T}_s^0(M) \to \mathscr{T}_s^0(N)$. Si $A \in \mathscr{T}_s^0(M)$ es simétrico (resp. antisimétrico) entonces $f_*(A)$ es también simétrico (resp. antisimétrico).

3.4. Las formas diferenciales y el producto exterior

Una clase especial de tensores son las formas diferenciales definidas en un abierto de una variedad; éstas no son más que tensores covariantes antisimétricos.

Definición 3.14 (Forma diferencial de grado s)
Una *forma diferencial de grado s* (abreviadamente, una *s-forma diferencial*) sobre una variedad M (respectivamente, sobre un abierto U) es un tensor covariante antisimétrico de tipo $(0, s)$ sobre M (respectivamente,

sobre U). El conjunto de las s-formas diferenciales sobre M se denota por $\bigwedge^s(M)$, y el conjunto $\bigwedge(M)$ denotará el conjunto de todas las formas diferenciales sobre M, es decir, $\bigwedge(M) = \bigcup_{s\geq 0} \bigwedge^s(M)$.

Si denotamos por $\Sigma^s(M)$ el subespacio de $\mathscr{T}_s^0(M)$ formado por los tensores simétricos, entonces existe otro subespacio, que podemos denotar por $R^s(M)$, tal que $\mathscr{T}_s^0(M) = \Sigma^s(M) \oplus \bigwedge^s(M) \oplus R^s(M)$, lo que nos permitirá obtener tensores simétricos y/o antisimétricos a partir de tensores dados.

Ejemplo (El tensor determinante)
Sea $M = \mathbb{R}^2$ y consideremos el tensor $A \in \mathscr{T}_2^0(M)$ definido como sigue:

$$A(X,Y) = x_1y_2 - x_2y_1,$$

donde $X = x_1\partial_1 + x_2\partial_2$ e $Y = y_1\partial_1 + y_2\partial_2$. Es fácil probar que $A \in \bigwedge^2(M)$.

3.4.1. Los operadores simetrización y antisimetrización

Definimos entonces dos operadores sobre $\mathscr{T}_s^0(M)$ denominados *simetrización* $\mathscr{S}$ y *antisimetrización* $\mathscr{A}$, los cuales asocian a cada tensor T los siguientes tensores:

$$\mathscr{S}(T) = \frac{1}{s!}\sum_\sigma T_\sigma$$

y

$$\mathscr{A}(T) = \frac{1}{s!}\sum_\sigma \varepsilon_\sigma T_\sigma,$$

donde σ recorre el conjunto de las permutaciones de s letras, ε_σ es la signatura de σ y T_σ es esencialmente el tensor T cuando se han modificado sus argumentos por la acción de la permutación:

$$T_\sigma(X_1,\ldots,X_s) = T(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(s)}).$$

Los operadores simetrización $\mathscr{S}$ y antisimetrización $\mathscr{A}$ poseen interesantes propiedades entre las que destacan las siguientes.

Proposición 3.15 (Propiedades de $\mathscr{S}$ y $\mathscr{A}$)
Los operadores simetrización $\mathscr{S}$ y antisimetrización $\mathscr{A}$ cumplen:

a) *$\mathscr{A}$ y $\mathscr{S}$ son proyecciones, esto es, $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$ y $\mathscr{S}^2 = \mathscr{S}$.*
b) *La imagen de $\mathscr{A}$ son las formas diferenciales.*
c) *La imagen de $\mathscr{S}$ son los tensores covariantes simétricos.*

El resultado anterior nos permite caracterizar a los tensores simétricos y antisimétricos como sigue.

Proposición 3.16

a) *Un tensor T es simétrico si, y sólo si, $\mathscr{S}T = T$.*
b) *Un tensor T es antisimétrico si, y sólo si, $\mathscr{A}T = T$.*

3.4.2. El producto exterior

No es difícil probar que el producto tensorial de dos formas diferenciales no es, en general, una forma diferencial. Sin embargo, como sabemos que cada tensor determina, bajo la acción del operador $\mathscr{A}$, un tensor antisimétrico, podemos definir otra multiplicación para las formas diferenciales que es extraordinariamente útil. Se trata lógicamente del producto exterior $\wedge$ de formas diferenciales, que a dos formas de grado r y s le asocia otra forma diferencial de grado $r+s$.

Proposición 3.17 (El producto exterior de dos formas)
Sean $\omega \in \bigwedge^r(M)$, $\theta \in \bigwedge^s(M)$. Definimos $\omega \wedge \theta$ por la fórmula

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \theta)(X_1,\dots,X_{r+s}) &= \frac{(r+s)!}{r!\,s!}\mathscr{A}(\omega \otimes \theta)(X_1,\dots,X_{r+s}) \\ &= \frac{1}{r!\,s!}\sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(r)})\theta(X_{\sigma(r+1)},\dots,X_{\sigma(r+s)}),\end{aligned}$$

donde σ recorre las permutaciones de $r+s$ letras. Entonces $\omega \wedge \theta \in \bigwedge^{r+s}(M)$ y se denomina el producto exterior *de ω y θ.*

El producto exterior cumple las siguientes propiedades.

Proposición 3.18 (Propiedades del producto exterior de formas)

- *$\wedge$ es una operación bilineal, asociativa y no conmutativa.*
- *Si α y β son dos formas de grados r y s, respectivamente, entonces:*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{rs}\beta \wedge \alpha,$$

El producto exterior nos permite generar cualquier forma diferencial, de cualquier grado, a partir de las formas diferenciales de grado uno (las uno formas).

Proposición 3.19
Si $\{\omega^1,\dots,\omega^n\}$ es una referencia local de uno formas sobre una variedad diferenciable M (o sobre un abierto U de la misma) entonces el conjunto $\{\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_s} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_s \leq n\}$, constituye una base para $\bigwedge^s(M)$ (ó $\bigwedge^s(U)$, respectivamente).

3.5. Derivaciones y antiderivaciones en las formas

Si en lugar de considerar los tensores arbitrarios de tipo (r,s) nos centramos en las formas diferenciales, entonces podemos definir dos tipos de operadores con propiedades muy especiales.

Definición 3.20 (Derivación de grado 2*k*)
Un operador $T : \bigwedge(M) \to \bigwedge(M)$ se dice que es una *derivación* de grado $2k, k \in \mathbb{Z}$, si satisface las siguientes tres propiedades:
(1) $T\omega \in \bigwedge^{p+2k}(M)$ para toda $\omega \in \bigwedge^p(M)$.
(2) T es $\mathbb{R}$-lineal.
(3) $T(\omega \wedge \theta) = (T\omega) \wedge \theta + \omega \wedge (T\theta)$.

De manera dual podemos definir las antiderivaciones.

Definición 3.21 (Antiderivación de grado de 2*k*+1)
Un operador T es una *antiderivación* de grado $2k+1, k \in \mathbb{Z}$, si satisface:
(1) $T\omega \in \bigwedge^{p+2k+1}(M)$ para toda $\omega \in \bigwedge^p(M)$.
(2) T es $\mathbb{R}$-lineal.
(3) $T(\omega \wedge \theta) = (T\omega) \wedge \theta + (-1)^p\omega \wedge (T\theta)$, siendo p el grado de ω.

La relación entre derivaciones y antiderivaciones queda reflejada de manera clara en el siguiente resultado:

Proposición 3.22
(1) *Si D_1 y D_2 son derivaciones sobre $\bigwedge(M)$ entonces $[D_1,D_2]$ es una derivación sobre $\bigwedge(M)$ de grado igual a la suma de los grados de D_1 y D_2.*
(2) *Si D es una derivación y A es una antiderivación sobre $\bigwedge(M)$, entonces $[D,A]$ es una antiderivación sobre $\bigwedge(M)$.*
(3) *Si A_1 y A_2 son dos antiderivaciones sobre $\bigwedge(M)$, entonces $A_1A_2+A_2A_1$ es una derivación sobre $\bigwedge(M)$. Como consecuencia, si A es una antiderivación, entonces A^2 es una derivación.*

3.5.1. Carácter local de las derivaciones y antiderivaciones

Sea D un operador sobre $\bigwedge(M)$, entonces la restricción D_U al abierto U es un operador sobre $\bigwedge(U)$, siendo U un abierto de M. Se dice que D es un *operador local* si $(D\omega)|_U = D_U(\omega_U)$, para toda $\omega \in \bigwedge(M)$. Entonces demostramos que las derivaciones y antiderivaciones son locales, es decir:

Proposición 3.23
Si D es una derivación (antiderivación) sobre $\bigwedge(M)$ y $U \subset M$ es un abierto, entonces existe una única derivación (antiderivación) D_U sobre $\bigwedge(U)$ tal que

$$D_U(\theta|_U) = (D\theta)|_U$$

para cualquier forma θ sobre M.

Este resultado permite probar que si D es una derivación (o antiderivación) tal que $D(f) = 0$ para toda función diferenciable f y $D(\omega) = 0$ para toda uno forma ω, entonces $D \equiv 0$. Como consecuencia, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.24
Si D_1 y D_2 son dos derivaciones (o antiderivaciones) que coinciden sobre las funciones diferenciables y sobre las uno formas, entonces son iguales.

3.6. La diferencial exterior y el producto interior

Para finalizar el capítulo introducimos dos antiderivaciones que están íntimamente relacionadas con la derivada de Lie: la diferencial exterior y el producto interior por un campo de vectores diferenciable.

Proposición 3.25 (La diferencial exterior)
Existe una única antiderivación d de grado $+1$ sobre $\bigwedge(M)$ tal que:
(1) $d(f) = df$ *(la diferencial ordinaria) para toda función diferenciable f.*
(2) $d^2 = 0$.
d se denomina la diferencial exterior.

Explícitamente, la diferencial exterior puede calcularse del siguiente modo. Sea $\omega \in \bigwedge^p(M)$, $p \geq 0$. Para todo $X_1,\ldots,X_{p+1}$, $p>0$, campos de vectores, se tiene:

$$\begin{aligned}(d\omega)(X_1,\ldots,X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{p+1})) \\ &\quad +\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_{p+1}),\end{aligned}$$

y para $p = 0$:

$$(d\omega)(X) = X(\omega),$$

donde $\hat{X}_i$ significa que el campo X_i no aparece. En particular, si ω es una 1-forma se tiene lo siguiente:

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

Proposición 3.26 (Relación entre la diferencial exterior y el pullback)
Sea $\varphi : M \to M'$ una aplicación diferenciable. Entonces se cumple:
(a) $\varphi^*(\omega \wedge \theta) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\theta)$, *para ω y θ formas diferenciales.*
(b) φ^* *conmuta con la diferencial exterior, es decir,* $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$.

Proposición 3.27 (El producto interior)
Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores diferenciable. La aplicación $i_X : \bigwedge(M) \to \bigwedge(M)$ dada por

$$(i_X\omega)(X_1,\ldots,X_{r-1}) = \omega(X, X_1,\ldots,X_{r-1})$$

es una antiderivación de grado -1 sobre $\bigwedge(M)$. i_X se denomina el producto interior por X.

Si f es una función diferenciable, se define $i_X f = 0$. Entre las relaciones más importantes entre estos tres operadores están las siguientes:

Proposición 3.28
Sean X e Y campos de vectores diferenciables. Entonces se satisface lo siguiente:
(1) $\mathscr{L}_X = i_X d + d i_X$.
(2) $\mathscr{L}_X d = d\mathscr{L}_X = d i_X d$.
(3) $\mathscr{L}_X i_Y - i_Y \mathscr{L}_X = i_{[X,Y]}$.
(4) $\mathscr{L}_X i_X = i_X \mathscr{L}_X$.

FIN DEL CAPÍTULO 3