Capítulo 4

Integración en variedades

CONTENIDOS. Orientación en espacios vectoriales. Orientación en variedades. Variedades orientables. Criterios de orientabilidad. Ejemplos. Difeomorfismos que conservan o invierten la orientación. Elementos de volumen y orientación. Repaso a la integración en $\mathbb{R}^n$: función integrable, teorema de Fubini y teorema del cambio de variables para la integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$. La integral de una n-forma continua de soporte compacto sobre una variedad orientada. Propiedades básicas de la integral. Integración en variedades de Riemann. Cartas y atlas en sentido generalizado. Estructuras diferenciables en sentido generalizado. Variedades diferenciables con borde. El borde y el interior. El espacio tangente en un punto del borde. Vectores tangentes entrantes y salientes. Orientabilidad de variedades con borde y orientación inducida sobre el borde. El teorema de Stokes para variedades orientadas. Aplicaciones: el teorema de Green en el plano y teorema de la divergencia en el espacio. Integral de línea de una uno-forma. Formas diferenciales cerradas y exactas. Grupos de cohomología de De Rham. Aplicaciones entre los grupos de cohomología inducidas por aplicaciones diferenciables. El lema de Poincaré. Cohomología de De Rham de los espacios euclídeos punteados y de las esferas.

4.1. Orientación en variedades

4.1.1. Orientación en un espacio vectorial

Recordemos brevemente algunos conceptos sobre la orientación en un espacio vectorial.

Definición 4.1 (Orientación de una base)
Sea V un espacio vectorial n-dimensional y consideremos dos bases $\{e_i\}$ y $\{f_i\}$. Se dice que estas bases tienen la *misma orientación* si $\det(\alpha_i^j) > 0$, donde (α_i^j) es la matriz del cambio de base.

Sea $\mathscr{B}$ el conjunto de todas las bases del espacio vectorial V. Es muy fácil ver que la relación *tener la misma orientación*, según la definición anterior, determina una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathscr{B}$, y que el conjunto cociente de las clases de equivalencia está formado por exactamente dos clases.

Definición 4.2 (Orientación de un espacio vectorial)
Un espacio vectorial orientado es un par formado por un espacio vectorial junto con una de las dos clases de equivalencia del conjunto cociente $\mathscr{B}/\sim$. Las bases que pertenecen a esta clase se dice que están *(positivamente) orientadas*.

En ocasiones, y por abuso del lenguaje, se considera que un espacio vectorial orientado es un espacio vectorial junto con una base predeterminada, entendiendo que la orientación del espacio vectorial es la determinada por la base elegida.

Lema 4.3
Sea $0 \neq \Omega \in \bigwedge^n(V)$ un tensor covariante antisimétrico sobre V de orden $n = \dim(V)$, y sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de V. Entonces para cualesquiera vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$, con $v_i = \sum \alpha_i^j e_j$, se cumple

$$\Omega(v_1, \dots, v_n) = \det(\alpha_i^j)\Omega(e_1, \dots, e_n).$$

Como consecuencia de lo anterior podemos enunciar lo siguiente.

Corolario 4.4
Un tensor $0 \neq \Omega \in \bigwedge^n(V)$ tiene el mismo signo (o signo contrario) sobre dos bases si éstas tienen la misma orientación (o distinta orientación, respectivamente). Consecuentemente, la elección de una n-forma Ω no nula determina una orientación en V. Además, dos de tales n-formas Ω_1 y Ω_2 determinan la misma orientación si, y sólo si, $\Omega_2 = \lambda\Omega_1$, donde $\lambda > 0$.

Si $\Omega \neq 0$, entonces los vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ son linealmente independientes si, y sólo si, $\Omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0$. Dado que $\bigwedge^n(V)$ tiene dimensión 1, el corolario anterior nos dice cómo podemos cambiar de orientación: basta elegir la n-forma $-\Omega$.

Un caso especial aparece cuando consideramos un espacio vectorial euclídeo, es decir, un espacio vectorial dotado con un producto escalar definido positivo (a veces llamado producto interno). Entonces la orientación queda determinada al elegir una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, y podemos seleccionar una n-forma Ω imponiendo que su valor sobre $\{e_1, \dots, e_n\}$ sea $+1$. Entonces si $\{f_1, \dots, f_n\}$, $f_i = \sum \alpha_i^j e_j$, es otra base ortonormal, se tiene que

$$\Omega(v_1, \dots, v_n) = \det(\alpha_i^j)\Omega(e_1, \dots, e_n) = \pm 1,$$

según que $\{f_1, \dots, f_n\}$ esté orientada postivamente o no. Casos especiales aparecen en dimensiones 2 y 3, pues $\Omega(v_1, v_2)$ y $\Omega(v_1, v_2, v_3)$ representan el área determinada por el paralelogramo $\{v_1, v_2\}$ o el volumen del paralelepípedo $\{v_1, v_2, v_3\}$, respectivamente.

4.1.2. Orientación en una variedad

Definición 4.5 (Orientación de una variedad)
Una variedad diferenciable M se dice que es *orientable* si es posible definir una n-forma diferenciable $\Omega \in \bigwedge^n(M)$ que no se anule en ningún punto de M. En este caso se dirá que M está orientada por la elección de Ω y se escribirá como el par (M, Ω).

Como una consecuencia del Corolario 4.4, si Ω determina una orientación en M, entonces cualquier otra n-forma $\Omega' = \lambda\Omega$, donde $\lambda > 0$ es una función diferenciable, determina la misma orientación en M.

Ejemplo
Sea $\mathbb{R}^n$ con el sistema de coordenadas usual $(x_1, \dots, x_n)$. Entonces $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ determina una orientación en $\mathbb{R}^n$, que se corresponde con la orientación determinada por la base canónica $\{\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}\}$.

Si M es una variedad orientada por una n-forma Ω y $U \subset M$ es un abierto, entonces U puede orientarse mediante la n-forma $\Omega_U = \Omega|_U$, definida de modo natural.

Definición 4.6 (Difeomorfismos que preservan la orientación)
(a) Sea (M,Ω) una variedad orientada y consideremos $F : U \longrightarrow V$ un difeomorfismo entre dos abiertos de M. Se dice que F *preserva la orientación* si $F^*(\Omega_V) = \lambda\Omega_U$, donde $\lambda > 0$ es una función diferenciable en el abierto U.
(b) Sea $F : (M_1,\Omega_1) \longrightarrow (M_2,\Omega_2)$ un difeomorfismo entre dos variedades orientadas. Diremos que F *preserva la orientación* si $F^*\Omega_2 = \lambda\Omega_1$, donde $\lambda > 0$ es una función diferenciable en M_1.

Definición 4.7 (Cartas orientadas coherentemente)
Sea M una variedad orientada y consideremos dos cartas $(U_\alpha,\varphi_\alpha)$ y (U_β,φ_β). Se dice que dichas cartas están *orientadas coherentemente* si $U_\alpha \cap U_\beta = \varnothing$ o, en caso contrario, si la aplicación de cambio de cartas $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ preserva la orientación.

Teorema 4.8
Una variedad diferenciable M es orientable si, y sólo si, admite un atlas $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_\alpha$ cuyas cartas están orientadas coherentemente.

Sea M una variedad diferenciable. Un *tensor métrico* g sobre M es un tensor covariante de orden 2 y simétrico con la propiedad que en cada espacio tangente T_pM, g_p es un producto escalar. Cuando g_p es un producto definido positivo, entonces se dice que g es un tensor métrico riemanniano o una *métrica riemanniana*. El par (M,g) formado por una variedad diferenciable y una métrica riemanniana se denomina *variedad riemanniana*.

Teorema 4.9
Sea M una variedad riemanniana orientable con tensor métrico g. Dada una orientación de M existe una única n-forma Ω que proporciona la orientación y que vale $+1$ sobre cada referencial ortonormal orientado.

La n-forma Ω que nos proporciona este teorema se denomina el *elemento de volumen* de la variedad riemanniana orientada M. Es fácil ver que en coordenadas locales (U,φ), $\varphi = (x_1,\dots,x_n)$, dicho elemento de volumen está dado por

$$(\varphi^{-1})^*\Omega = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

donde g_{ij} son las funciones componentes del tensor métrico. Cuando $M = \mathbb{R}^n$ con las coordenadas usuales $(x_1,\dots,x_n)$, entonces $\Omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

4.2. Repaso a la integración en $\mathbb{R}^n$

Como paso previo a la integración en una variedad diferenciable orientada, en esta sección recordaremos brevemente los conceptos y resultados básicos de la integración en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$. En primer lugar, un *cubo* (abierto) C en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma

$$C = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i,\ i = 1,\dots,n\} = \prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i),$$

para ciertas constantes $a_i < b_i$, $i = 1,\dots,n$. Cuando los extremos están incluidos entonces se dice que es un cubo cerrado:

$$\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i,\ i = 1,\dots,n\} = \prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i].$$

Definición 4.10 (Contenido de Jordan cero)
Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene *contenido de Jordan cero*, $c(A) = 0$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una colección finita de cubos $C_1,\dots,C_s$ recubriendo A y tales que $\sum_{i=1}^{s} \mathrm{vol}(C_i) < \varepsilon$.

Definición 4.11 (Medida de Lebesgue cero)
Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene *medida de Lebesgue cero*, $m(A) = 0$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una colección numerable de cubos $\{C_i\}_i$ recubriendo A y tales que $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}(C_i) < \varepsilon$.

Es fácil ver que estos conceptos no son equivalentes. Obviamente todo conjunto de contenido de Jordan cero tiene medida de Lebesgue cero; el recíproco no es cierto, como se comprueba con el conjunto $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ de los números racionales.

Definición 4.12 (Dominio de integración)
Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ es un *dominio de integración* si está acotado y su frontera tiene contenido cero, $c(\mathrm{Fr}(D)) = 0$. Una función f sobre $\mathbb{R}^n$ se dice *casi continua* si el conjunto de los puntos de discontinuidad tiene contenido cero.

Teorema 4.13
Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de integración y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función acotada y casi continua. Entonces existe la integral de Riemann $\int_D f\, dv$. La función f se dice que es integrable *sobre D.*

Recordemos que la integral de Riemann se define como el límite, cuando existe, de las sumas de Riemann sobre particiones del dominio cuya norma tiene a cero. La prueba en el caso n-dimensional es totalmente análoga a la demostración en el caso clásico de funciones $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

4.2.1. Propiedades elementales de la integral de Riemann

Antes de enunciar estas propiedades, veamos otras propiedades básicas de los dominios de integración, muy fáciles de probar.

Proposición 4.14
(a) Si D es un dominio de integración, entonces también lo son su interior $\overset{\circ}{D}$ y su adherencia $\overline{D}$.
(b) Si D_1 y D_2 son dominios de integración, también lo son $D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2$ y $D_1 - D_2$.

Observemos que la propiedad (b) se extiende a las uniones e intersecciones finitas. Enunciemos ahora 4 propiedades básicas de la integración en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 4.15
(a) Si D es un dominio de integración con $c(D) = 0$, entonces

$$\int_D f\, dv = 0.$$

(b) Si D_1 y D_2 son dominios de integración, entonces

$$\int_{D_1 \cup D_2} f\, dv = \int_{D_1} f\, dv + \int_{D_2} f\, dv - \int_{D_1 \cap D_2} f\, dv.$$

(c) Si f y g son funciones integrables, entonces

$$\int_D (af + bg)\, dv = a \int_D f\, dv + b \int_D g\, dv,$$

para cualesquiera constantes $a, b \in \mathbb{R}$.
(d) Si $f \geq 0$ y $c(D) \neq 0$, entonces

$$\int_D f\, dv \geq 0,$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $f = 0$ en los puntos de continuidad.

Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, con soporte compacto y casi continua, entonces podemos definir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, dv := \int_D f\, dv,$$

donde D es cualquier dominio de integración que contiene al soporte de f.

Definición 4.16 (Volumen de un dominio de integración)
Sea D un dominio de integración. Se define el *volumen de D*, $\mathrm{vol}(D)$, como

$$\mathrm{vol}(D) = \int_{\mathbb{R}^n} k_D\, dv = \int_D k_D\, dv,$$

donde k_D es la función característica de D.

Recordemos que la función característica k_A de un conjunto A de un espacio X se define como $+1$ en los puntos de A y 0 en los puntos del complementario $X - A$. Por tanto, k_A está acotada y es discontinua en los puntos de la frontera $\mathrm{Fr}(A)$. En particular, si D es un dominio de integración entonces $c(\mathrm{Fr}(D)) = 0$, por lo que k_D es una función integrable y la definición anterior es correcta.

Proposición 4.17
Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de integración y f una función integrable. Se cumple lo siguiente:
(a) $\left(\inf_D f\right) \mathrm{vol}(D) \leq \int_D f\, dv \leq \left(\sup_D f\right) \mathrm{vol}(D)$.
(b) Si D es conexo y f es continua, entonces

$$\int_D f\, dv = f(p)\mathrm{vol}(D),$$

donde p es un punto del dominio D. Esta igualdad se denomina propiedad del valor medio.

Presentamos a continuación una versión simplificada del teorema de Fubini, que nos permite expresar una integral n-dimensional como n integrales 1-dimensionales consecutivas.

Proposición 4.18 (Teorema de Fubini simplificado)
Si f es una función continua sobre un dominio de integración D que es un cubo $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, entonces

$$\int_D f\, dv = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n$$

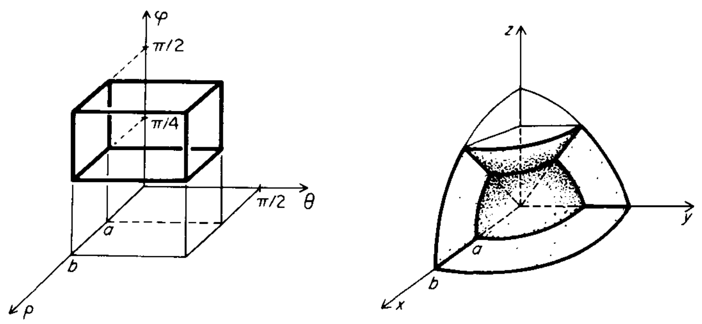
Teorema 4.19 (Cambio de variable)
Sea $G : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo y sea $\det(G)$ el determinante de su matriz jacobiana. Supongamos que $D \subset U$ y $D' = G(D) \subset U'$ son dominios de integración y que f' es integrable sobre D'. Sea la función $f = f' \circ G$. Entonces f es una función integrable sobre D y se cumple la igualdad

$$\int_{D'} f'(y)\, dv' = \int_D f(x) |\det(G)|\, dv.$$

Ejemplo
Consideremos el conjunto

$$D = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 < a \leq \varphi \leq b,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$$

y sea D' la zona del primer cuadrante del espacio xyz entre las esferas centradas en el origen y de radios a y b, y que está fuera del cono invertido que tiene por ecuación $z^2 = x^2 + y^2$ (véase el siguiente dibujo).



(a) (b)

Consideremos la aplicación G dada en coordenadas como sigue:

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta, \\ y &= \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta, \\ z &= \rho \cos\varphi. \end{aligned}$$

Si la función f' está dada por $f'(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ entonces la función f está definida por $f(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2$, y el determinante de la matriz jacobiana de G está dado por $\det(G) = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$, de modo que

$$\int_{D'} (x^2+y^2+z^2)\, dxdydz = \int_D \rho^4 \operatorname{sen}\varphi \; d\rho d\varphi d\theta.$$

Lema 4.20
Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y sea $F : A \to \mathbb{R}^m$, $n \leq m$, una aplicación de clase $\mathscr{C}^1$. Entonces $F(A)$ tiene contenido cero si $n < m$ o si $n = m$ y A tiene tiene contenido cero.

Este lema nos permite extender a variedades los conceptos y resultados que hemos recordado en esta sección.

4.3. Integración en variedades

Definición 4.21 (Conjunto de contenido cero y de medida cero)
(1) Un conjunto $A \subset M$ tiene *contenido cero*, $c(A) = 0$, si está contenido en una unión finita de subconjuntos compactos $A \subset A_1 \cup \cdots \cup A_s$, cada uno de los cuales está en un entorno coordenado (U_i, φ_i) tal que $c(\varphi_i(A_i)) = 0$ en $\mathbb{R}^n$, para todo i.
(2) Un conjunto $B \subset M$ tiene *medida cero*, $m(B) = 0$, si es la unión de una familia numerable de conjuntos B_i de contenido cero.

Corolario 4.22
Si $A \subset M$ tiene contenido (o medida) cero y $F : M \to N$ es una aplicación de clase $\mathscr{C}^1$ con $\dim(M) \leq \dim(N)$, entonces $F(A)$ tiene contenido (o medida) cero. En particular, esto sucede cuando F es un difeomorfismo.

Definición 4.23 (Dominio de integración)
Un conjunto $D \subset M$ es un *dominio de integración* si es relativamente compacto y su frontera tiene contenido cero.

Recordemos que en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ los conceptos relativamente compacto y acotado son equivalentes.

Teorema 4.24
Sea M una variedad diferenciable.

(1) Si $D \subset M$ es un dominio de integración, también lo son $\overset{\circ}{D}$ y $\overline{D}$.
(2) Las uniones e intersecciones finitas de dominios de integración también son dominios de integración.
(3) La imagen de un dominio de integración por un difeomorfismo es un dominio de integración.

La demostración de este resultado es una consecuencia directa de la Definición 4.21 y de los resultados análogos que se satisfacen para dominios de integración en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

Sea M una variedad diferenciable orientada. Esto significa que hemos escogido una n-forma $\Omega \in \bigwedge^n(M)$ que no se anula en ningún punto de M. La llamaremos el *elemento de volumen* de M. Cualquier otra n-forma $\omega \in \bigwedge^n(M)$ está dada por $\omega = f\Omega$, para una cierta función diferenciable $f \in \mathscr{C}^\infty(M)$.

Definición 4.25 (Función integrable)
Una función f sobre M se dice que es *integrable* si está acotada, tiene soporte compacto y es casi-continua. Una n-forma ω se dice que es integrable si $\omega = f\Omega$, donde f es una función integrable.

Una propiedad importante es que la integrabilidad de una n-forma es independiente de la n-forma que determina la orientación de M.

Proposición 4.26
La propiedad de ser integrable no depende de la n-forma Ω.

En efecto, si $\widetilde{\Omega}$ es otra n-forma que proporciona la misma orientación, entonces $\widetilde{\Omega} = g\Omega$, con $g > 0$ una función diferenciable. Por tanto, $f\Omega = (f/g)\widetilde{\Omega}$, de modo que si f es integrable (i.e. está acotada, tiene soporte compacto y es casi-continua) también lo es f/g.

Proposición 4.27
Sea $\bigwedge_0^n(M)$ el conjunto

$$\textstyle\bigwedge_0^n(M) = \{\omega \in \bigwedge^n(M) \mid \omega \text{ es integrable } \}.$$

Entonces $\bigwedge_0^n(M)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, cerrado para la multiplicación por funciones continuas o integrables.

Definición 4.28 (Cubo de una variedad)
Un conjunto $Q \subset M$ se dice que es un *cubo* si existe un entorno coordenado orientado (U, φ) tal que $Q \subset U$ y $\varphi(Q)$ es el cubo $C = \prod_{i=1}^n [0,1]$ en $\mathbb{R}^n$. En particular, un cubo Q es un conjunto compacto.

Consideremos $\omega \in \bigwedge_0^n(M)$ tal que $\mathrm{sop}(\omega) \subset \overset{\circ}{Q}$ y sea (U, φ) la carta asociada. Podemos escribir

$$(\varphi^{-1})^*(\omega) = f(x)\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

como la representación de ω en las coordenadas locales. Entonces la función f está acotada y es casi-continua en C, por lo que es integrable (de Riemann). Definimos

$$\int_M \omega = \int_C f\, dv$$

Proposición 4.29
La anterior definición es buena, es decir, el valor de la integral es independiente del cubo elegido.

Este resultado implica que la integral $\int_M \omega$ está unívocamente determinada para cualquier n-forma integrable ω cuyo soporte esté dentro de un cubo. Veamos que puede extenderse a cualquier n-forma.

Sea $K = \mathrm{sop}(\omega)$ y escojamos un cubrimiento finito de K formado por interiores de cubos $\overset{\circ}{Q}_1, \ldots, \overset{\circ}{Q}_b$, cubos que están asociados a sistemas de coordenadas $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{b}$. Los conjuntos abiertos $\{M - K, \overset{\circ}{Q}_1, \ldots, \overset{\circ}{Q}_b\}$ recubren M. Tomemos una partición diferenciable de la unidad $\{f_i\}$ subordinada a dicho cubrimiento; por la compacidad de K y la propiedad de ser localmente finita, existe un índice s tal que $K \cap \mathrm{sop}(f_i) = \varnothing$ para $i > s$, de modo que $f_i\omega = 0$ en este caso. Como $\sum_i f_i = 1$ entonces

$$\omega = f_1\omega + \cdots + f_s\omega.$$

Definimos

$$\int_M \omega = \int_M f_1\omega + \cdots + \int_M f_s\omega. \tag{4.1}$$

Cada una de las integrales de la parte derecha está bien definida, ya que $\mathrm{sop}(f_j) \subset \overset{\circ}{Q}_j \subset Q_j$.

Proposición 4.30
Sea ω una n-forma integrable. El valor de la integral (4.1) no depende ni del cubrimiento de cubos ni de la partición diferenciable de la unidad.

El siguiente resultado recoge algunas de las propiedades más elementales de la integración en variedades.

Teorema 4.31
(1) Si $-M$ denota a la misma variedad M pero con la orientación opuesta, entonces

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega.$$

(2) La aplicación $\omega \to \int_M \omega$ es $\mathbb{R}$-lineal.
(3) Si ω es una n-forma que proporciona una orientación en M y $\omega = g\Omega$, $g \geq 0$, entonces

$$\int_M \omega \geq 0,$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $g = 0$ en los puntos de continuidad.
(4) Si $F : M_1 \to M_2$ es un difeomorfismo y $\omega \in \bigwedge_0^n(M_2)$, entonces $F^*\omega \in \bigwedge_0^n(M_1)$ y

$$\int_{M_1} F^*\omega = \pm \int_{M_2} \omega,$$

donde el signo depende de que F conserve o invierta la orientación.

4.4. Integración en variedades riemannianas

Sea (M, g) una variedad riemanniana. Si M es orientable, entonces podemos escoger una n-forma Ω que vale $+1$ sobre cada base ortonormal orientada. Dicha n-forma se denomina el elemento de volumen de la variedad riemanniana y en un sistema de coordenadas $\varphi = (x_1, \ldots, x_n)$ está caracterizado por la igualdad

$$(\varphi^{-1})^*\Omega = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Ejemplo
Sea $M \subset \mathbb{R}^3$ una superficie (diferenciable y regular) y consideremos (U, φ) una carta local con coordenadas (u, v). Sea $j : M \to \mathbb{R}^3$ la inclusión canónica y consideremos ψ la representante local de j (respecto de φ), de modo que podemos escribir

$$\psi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

La base usual de campos tangentes a la superficie está dada por

$$E_1 = \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial u}\partial_y + \frac{\partial z}{\partial u}\partial_z,$$

$$E_2 = \frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\partial_x + \frac{\partial y}{\partial v}\partial_y + \frac{\partial z}{\partial v}\partial_z.$$

Entonces los coeficientes de la métrica inducida en la superficie M, $j^*(g_0)$, están dados por:

$$g_{11}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$g_{12}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$g_{22}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Usualmente estos coeficientes se denotan con las letras E, F y G, respectivamente. Entonces podemos escribir

$$(\varphi^{-1})^*\Omega = \sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv.$$

Si D es un dominio de integración en M tal que $D \subset U$ y h es una función integrable en D, entonces

$$\int_D h\, dA = \int_{\varphi(D)} h(u,v)\sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Supongamos que M es una variedad riemanniana compacta cubierta por un número finito de dominios de integración $D_1, \ldots, D_s$ con las siguientes propiedades: (1) $c(D_i \cap D_j) = 0$, siempre que $i \neq j$; (2) cada D_i está contenido en un entorno coordenado (U_i, φ_i). Entonces se tiene la igualdad siguiente:

$$\int_M f\, dv = \sum_{i=1}^{s} \int_{D_i} f\, dv,$$

donde cada integral de la derecha puede calcularse como sigue:

$$\int_{D_i} f\, dv = \int_{\varphi_i(D_i)} f(x)\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

4.5. Variedades con frontera

Para poder extender en toda su generalidad la integración del espacio euclídeo necesitamos introducir una nueva clase de variedades diferenciables, cuya diferencia básica es que no están modeladas sobre el espacio $\mathbb{R}^n$, sino sobre el semiespacio H^n definido por

$$H^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\},$$

con la topología relativa como subespacio de $\mathbb{R}^n$. Ejemplos típicos de esta clase de variedades son un segmento o un rayo de $\mathbb{R}$, un disco en el plano o una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$.

El conjunto ∂H^n, definido por

$$\partial H^n = \{x \in H^n \mid x_n = 0\}$$

se denomina el *borde* (o la *frontera*) de H^n y su topología es la misma tanto si se considera en H^n como en $\mathbb{R}^n$. Ahora extendamos el concepto de diferenciabilidad a funciones de H^n.

Sean dos abiertos $U, V \subset H^n$ tales que no cortan a la frontera de H, es decir, $U \cap \partial H^n = \varnothing = V \cap \partial H^n$. Entonces un difeomorfismo $F : U \subset H^n \to V \subset H^n$ se define del mismo modo que en $\mathbb{R}^n$: la aplicación F debe ser biyectiva, diferenciable y con inversa diferenciable (en el sentido usual).

Cuando $U \cap \partial H^n \neq \varnothing$, entonces debe ser $V \cap \partial H^n \neq \varnothing$ y $F(U \cap \partial H^n) \subset V \cap \partial H^n$. En otras palabras, los difeomorfismos sobre abiertos de H^n llevan puntos de la frontera en puntos de la frontera, y puntos interiores en puntos interiores. Esto se deduce directamente del teorema de la función inversa.

Observemos que $U \cap \partial H^n$ y $V \cap \partial H^n$ son subconjuntos abiertos de ∂H^n, que es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ difeomorfa a $\mathbb{R}^{n-1}$, y las aplicaciones F y F^{-1} restringidas a estos abiertos en $\mathbb{R}^n$ son difeomorfismos.

Por otra parte, tanto F como F^{-1} pueden extenderse a conjuntos abiertos U' y V' de $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de que $U = U' \cap \partial H^n$ y $V = V' \cap \partial H^n$. Estas extensiones no son, evidentemente, únicas. Sin embargo, las diferenciales de F y F^{-1} en U y V son independientes de las extensiones.

En este contexto, una *carta local* (U, φ) en M es una aplicación biyectiva de un subconjunto U de M en un abierto de H^n. Si partimos de un espacio topológico M que es Hausdorff y posee una base numerable (esto es, un espacio paracompacto), entonces se pide que φ sea un homeomorfismo de U en un abierto de H^n. Ahora podemos introducir la siguiente definición.

Definición 4.32 (Variedad diferenciable con borde)
Una *variedad diferenciable con borde* es un espacio de Hausdorff M con una base numerable que posee una estructura diferenciable en el siguiente sentido: $\mathscr{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ es una familia de abiertos $U_\alpha \subset M$ y homeomorfismos φ_α de U_α en abiertos de H^n (con la topología de subespacio) tal que:
(1) $\cup_\alpha U_\alpha = M$.
(2) Si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, entonces las aplicaciones $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ y $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ son difeomorfismos entre los abiertos $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ y $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ de H^n.
(3) $\mathscr{U}$ es maximal para las propiedades (1) y (2).

Sea M una variedad con borde y (U, φ) una carta local. Si $p \in U$ es un punto tal que $\varphi(p) \in \partial H^n$, entonces lo mismo ocurre para cualquier otro sistema de coordenadas alrededor del punto p. La colección de tales puntos se denomina el *borde* de M (o la *frontera* de M) y se denota por ∂M. La diferencia $M - \partial M$ es una variedad diferenciable en el sentido ordinario, que denotaremos por $\mathrm{Int}M$. Si $\partial M = \varnothing$, entonces M es una variedad diferenciable ordinaria; en ocasiones nos referiremos a ella como variedad sin borde, cuando sea necesario hacer la distinción frente a una variedad con borde.

Teorema 4.33
Si M es una variedad diferenciable con borde, $\dim(M) = n$, entonces la estructura diferenciable de M determina una estructura diferenciable de dimensión $n-1$ sobre el subespacio ∂M de M. La inclusión canónica $i : \partial M \to M$ es un embebimiento.

La estructura diferenciable $\widetilde{\mathscr{U}}$ sobre ∂M está determinada por las cartas $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$, donde $\tilde{U} = U \cap \partial M$, $\tilde{\varphi} = \varphi|_{U \cap \partial M}$ para cualquier carta (U, φ) de la estructura diferenciable de M que tenga puntos de ∂M.

Todos los conceptos que se han definido para variedades diferenciales ordinarias (es decir, sin borde) pueden definirse también para las variedades con borde, siempre en términos de los sistemas de coordenadas. Por ejemplo, veamos con algo de detalle cómo extender a las variedades con borde el espacio tangente en un punto.

Para la variedad modelo $H^n \subset \mathbb{R}^n$ se considera

$$T_x H^n = T_x \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$$

para todo punto $x \in H^n$, incluyendo los puntos del borde ∂H^n.

En el caso de una variedad con borde M, si el punto p está en el interior de M entonces el espacio tangente T_pM se define como en el caso ordinario. Si $p \in \partial M$, se define un vector tangente $X_p \in T_pM$ como una correspondencia que en cada carta local (U,φ) le asigna una n-upla de números $(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$, las componentes locales de X_p respecto de (U,φ), satisfaciendo la siguiente condición: si $(x^1,\dots,x^n)$ e $(y^1,\dots,y^n)$ son coordenadas alrededor de p, en cartas (U,φ) y (V,ψ), entonces las componentes $(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$ y $(\beta^1,\dots,\beta^n)$ relativas a U y V están relacionadas por

$$\beta^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(\varphi(p))\alpha^j.$$

Esto significa que a cada punto $p \in M$ le asociamos un espacio vectorial T_pM tal que cada carta (U,φ) determina un isomorfismo $\varphi_{*p} : T_pM \to T_{\varphi(p)}H^n$ que aplica X_p, con componentes $(\alpha^1,\dots,\alpha^n)$, en el vector

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}H^n.$$

Como es habitual, $\{E_1,\dots,E_n\}$ será la base del espacio tangente definida por $\varphi_*(E_i) = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Definición 4.34 (Dominio regular)
Un dominio regular D en una variedad M es un subconjunto cerrado de M con interior $\overset{\circ}{D}$ no vacío tal que si $p \in \partial D = D - \overset{\circ}{D}$, entonces p admite un sistema de coordenadas (U,φ) tal que $\varphi(p) = 0$, $\varphi(U) = C^n_\varepsilon(0)$ y $\varphi(U\cap D) = \{x \in C^n_\varepsilon(0) \mid x^n \geq 0\}$; por tanto $x^n \equiv 0$ sobre ∂D.

Como consecuencia, ∂D es una subvariedad regular de M. Si D fuese compacto entonces sería un dominio de integración.

Teorema 4.35
Toda variedad diferenciable M con borde puede considerarse un dominio regular de una variedad más grande M'.

Aunque la demostración rigurosa del teorema es difícil, sin embargo la idea básica es muy elemental: se trata de pegarle un duplicado (como una imagen especular) a lo largo de la frontera para construir las variedad M'. Por ejemplo, si consideremos un disco en $\mathbb{R}^2$, al pegarle otra copia a lo largo de la frontera obtenemos otra variedad que no es más que una esfera.

Analizaremos a continuación la cuestión de la orientabilidad.

Definición 4.36 (Variedad con borde orientable)
Una variedad con borde M es orientable si admite un sistema de coordenadas $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ que está orientado coherentemente, esto es, si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ entonces el jacobiano del cambio de cartas tiene determinante positivo.

Esto equivale a la existencia de una n-forma Ω sobre M que no se anula en ningún punto. La prueba de este hecho es la misma que para las variedades ordinarias, excepto que en lugar de una partición diferenciable de la unidad subordinada a un cubrimiento regular, nos debemos limitar a cubrimientos formados por cubos satisfaciendo la siguiente condición: si $U_\alpha \cap \partial M \neq \varnothing$ entonces $\varphi_\alpha(U_\alpha) = C^n_\varepsilon(0) \cap H^n$.

Teorema 4.37
Sea M una variedad orientada y supongamos que $\partial M \neq \varnothing$. Entonces ∂M es orientable y la orientación de M determina una orientación sobre ∂M. En particular, esto sucede para ∂D si D es un dominio regular en M.

De la demostración del teorema anterior se deduce el siguiente hecho. Si $p \in \partial M$, entonces los vectores de $T_pM - T_p(\partial M)$ están en dos clases, aquellos cuya última componente es positiva, que llamaremos *vectores que apuntan hacia dentro* (o *vectores entrantes*), y aquellos cuya última componente es negativa, que llamaremos *vectores que apuntan hacia afuera* (o *vectores salientes*). Además, esta clasificación es independiente de la orientación de M. Recordemos que los sistemas de coordenadas $(x^1, \ldots, x^n)$ para los puntos de la frontera cumplen la condición $x^n = 0$ en los puntos de ∂M y $x^n > 0$ en el resto de puntos del entorno coordenado.

4.6. El teorema de Stokes

Sea M una variedad orientada con borde ∂M, orientado por la orientación de M. Consideraremos sistemas de coordenadas orientados (U, φ) tales que si $U \cap \partial M \neq \varnothing$, entonces $(\tilde{U} = U \cap \partial M, \tilde{\varphi} = \varphi|_{\tilde{U}})$ es un sistema de coordenadas en ∂M orientado.

Observemos que todos los conceptos sobre integración introducidos anteriormente para variedades ordinarias pueden definirse también, sin ninguna dificultad, para variedades con borde: conjuntos de contenido cero, dominios de integración, etc. En particular, ∂M tiene medida cero y, si es compacto, tiene contenido cero.

Un cubo Q siempre está asociado a una carta (U, φ); si $U \cap \partial M \neq \varnothing$ entonces supondremos que Q tiene una cara sobre ∂M, esto es,

$$\varphi(U \cap \partial M) = \{x \in H^n \mid 0 \leq x^i \leq 1,\ x^n = 0\}.$$

En este caso se tiene:

(a) $\tilde{Q} = Q \cap \partial M$ es un cubo de ∂M asociado con la carta $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$.

(b) $\overset{\circ}{Q} = \varphi^{-1}(\{x \in H^n \mid 0 < x^i < 1, i = 1, \ldots, n-1, 0 \leq x^n < 1\})$, que es diferente al caso en que $U \subset \mathrm{Int}M$.

Supongamos ahora que M es una variedad compacta orientada y que ω es una $(n-1)$-forma diferenciable. Consideremos la inclusión canónica $i : \partial M \to M$, de modo que $i^*\omega$ es una $(n-1)$-forma sobre ∂M. Para simplificar el enunciado del siguiente teorema, $\tilde{\partial} M$ denotará ∂M (el borde de M con la orientación positiva) si n es par, y $-\partial M$ (el borde de M con la orientación negativa) si n es impar. Es decir, $\tilde{M} = (-1)^n \partial M$.

Teorema 4.38 (Teorema de Stokes)
Sea M una variedad compacta orientada de dimensión n (o un dominio regular compacto de una variedad orientada M') y supongamos que el borde tiene la orientación $\tilde{\partial} M$ descrita anteriormente. Entonces

$$\int_M d\omega = \int_{\tilde{\partial} M} i^*\omega,$$

para cualquier $(n-1)$-forma $\omega \in \bigwedge^{n-1}(M)$. Si $\partial M = \varnothing$ (esto es, si M es una variedad ordinaria), entonces

$$\int_M d\omega = 0.$$

Observemos que cuando $n = 1$, entonces $M = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y el teorema de Stokes no es más que el teorema fundamental del cálculo integral para funciones reales de variable real:

$$\int_a^b df = f(b) - f(a).$$

4.6.1. Casos especiales: el teorema de Green y el teorema de la divergencia

Sea D un dominio regular acotado en $\mathbb{R}^2$, de modo que ∂D es una curva cerrada diferenciable (o una unión de curvas cerradas diferenciables). Si ω es una 1-forma entonces podemos escribir $\omega = adx + bdy$, para ciertas funciones diferenciables a y b. Entonces

$$d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Aplicando el teorema de Stokes deducimos lo siguiente.

Teorema 4.39 (de Green)

$$\int_D \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int_{\partial D} (adx + bdy).$$

Si pensamos que la integral de la izquierda es una integral doble y suponemos que el borde ∂D es la unión de las curvas cerradas $\{C_i\}$ entonces se tiene el clásico enunciado del teorema de Green:

$$\iint_D \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) dxdy = \sum_i \int_{C_i} (adx + bdy).$$

Consideremos ahora M un dominio regular en $\mathbb{R}^3$, esto es, la adherencia de un conjunto abierto acotado por una superficie diferenciable. Sea ω una 2-forma:

$$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy,$$

donde P, Q, R son funciones diferenciables. Entonces

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz,$$

y como aplicación directa del teorema de Stokes se deduce lo siguiente.

Teorema 4.40 (de la divergencia)

$$\iiint_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_{-S} (Pdydz + Qdxdzdx + Rdxdy)$$

donde S representa la superficie frontera.

4.6.2. Integral de línea de una 1-forma

Sea $F : [a,b] \to M$ una aplicación diferenciable (aunque bastaría que fuese de clase C^1) cuya imagen en M es una curva $\gamma \subset M$. Si ω es una 1-forma en M, se define la *integral de línea* de ω a lo largo de γ como sigue:

$$\int_\gamma \omega = \int_{[a,b]} F^*(\omega).$$

Observemos que $F^*(\omega)$ es una 1-forma en $\mathbb{R}$, por lo que $F^*(\omega) = f(t)dt$, de modo que

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f(t)dt.$$

Proposición 4.41
Sea $\gamma \subset M$ una curva en M parametrizada por una aplicación $F(t)$, $t \in [a,b]$. Supongamos que $t = f(s)$, $s \in [c,d]$, es un cambio de parámetro sobre γ. Entonces el valor de la integral $\int_\gamma \omega$ no cambia de signo si $f'(s) > 0$, es decir, si la orientación de $G = F \circ f$ es la misma. Cuando $f'(s) < 0$ entonces la integral cambia de signo.

La definición anterior puede extenderse a curvas diferenciables a trozos. Supongamos que $\gamma = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_r$, donde cada γ_i es una curva diferenciable y el punto final de γ_i coincide con el punto inicial de γ_{i+1}. Se define la integral de ω sobre γ como sigue:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{r} \int_{\gamma_i} \omega.$$

Ejemplo
Un caso especial aparece cuando $\omega = df$, para una función diferenciable f. Entonces si γ es una curva diferenciable a trozos entre dos puntos p y q, se tiene

$$\int_\gamma df = f(q) - f(p).$$

En particular, este valor es independiente del camino entre los puntos.

Una primera aplicación de la integral de línea de una 1-forma es la siguiente versión del clásico teorema de Stokes.

Corolario 4.42 (Versión simple del teorema de Stokes)
Sea ω una 1-forma definida en el cuadrado $Q = [0,1] \times [0,1]$ y sea γ el borde de Q orientada positivamente. Entonces:

$$\int_Q d\omega = \int_\gamma \omega.$$

4.7. Introducción a la cohomología de De Rham

En esta sección vamos a presentar ciertos resultados sobre variedades diferenciables que son tradicionalmente del dominio de la topología algebraica.

4.7.1. Formas diferenciales cerradas y exactas

Definición 4.43 (Forma diferencial cerrada y exacta)
Una forma diferencial $\omega \in \bigwedge(M)$ es *cerrada* si $d\omega = 0$. Se dice que ω es *exacta* si es la diferencial de otra forma, es decir, si $\omega = d\theta$. En este caso, θ se denomina *forma potencial* o *primitiva* de ω.

Teniendo en cuenta que $d^2 = 0$ es fácil ver que toda forma exacta es también cerrada. Sin embargo, el recíproco no es cierto, como veremos posteriormente con un ejemplo en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.

Por tanto, es la "forma" de M, y no su "tamaño", lo que determina si una forma diferencial cerrada sobre M es, o no es, exacta. En otras palabras, podemos obtener información sobre la forma de M analizando en qué medida las formas cerradas son necesariamente exactas.

4.7.2. Grupos de cohomología de De Rham

Una manera conveniente de tratar esta cuestión es definir, para una variedad diferenciable M, ciertos espacios vectoriales de la manera siguiente. El conjunto $C^k(M)$ de las k-formas cerradas sobre M y el conjunto $E^k(M)$ de las k-formas exactas sobre M son subespacios lineales del espacio vectorial $\bigwedge^k(M)$ de las k-formas diferenciales. En efecto, $C^k(M)$ es el núcleo del operador $d : \bigwedge^k(M) \to \bigwedge^{k+1}(M)$, mientras que $E^k(M)$ es la imagen del operador $d : \bigwedge^{k-1}(M) \to \bigwedge^k(M)$.

Como toda forma exacta es cerrada ($d^2 = 0$), $E^k(M)$ está contenido en $C^k(M)$ y podemos construir el espacio vectorial cociente.

Definición 4.44
El espacio vectorial cociente $H^k(M) = C^k(M)/E^k(M)$ se denomina el k-ésimo *grupo de cohomología de De Rham* de M. Si $n = \dim(M)$, denotaremos por $H^*(M)$ la siguiente suma directa:

$$H^*(M) = H^0(M) \oplus H^1(M) \oplus \cdots \oplus H^n(M).$$

Así pues, dos formas diferenciales cerradas están en la misma clase si, y sólo si, su diferencia es una forma diferencial exacta.

Antes de proseguir conviene hacer una observación. Para calcular $H^0(M)$ notemos que $E^0(M) = 0$, por lo que $H^0(M)$ coincide, como espacio vectorial, con el conjunto de las aplicaciones diferenciables f tales que $df = 0$. Si M es conexa, la condición $df = 0$ implica que f es constante y, así, $H^0(M) \approx \mathbb{R}$. En general, la dimensión de $H^0(M)$ es el número de componentes conexas de M.

Proposición 4.45
Sea M una variedad diferenciable con r componentes conexas. Entonces $H^0(M) \sim V^r$, un espacio vectorial real de dimensión r.

Observemos también que $H^*(M) = C(M)/E(M)$, donde $C(M)$ y $E(M)$ son el núcleo y la imagen de la aplicación $d : \bigwedge(M) \to \bigwedge(M)$, respectivamente. También puede comprobarse que

$$\begin{aligned} C(M) &= C^0(M) \oplus C^1(M) \oplus \cdots \oplus C^n(M), \\ E(M) &= E^0(M) \oplus E^1(M) \oplus \cdots \oplus E^n(M). \end{aligned}$$

Es fácil ver que $H^*(M)$ es un álgebra con la multiplicación inducida por el producto exterior de formas. Esto se sigue de la fórmula

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^r \omega \wedge d\theta,$$

siendo r el grado de ω, de lo cual se deduce que $C(M)$ es un álgebra que contiene a $E(M)$ como un ideal.

Ejemplo
Consideremos el caso de la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$. Sabemos que $\bigwedge^p(\mathbb{S}^1) = 0$ para $p > 1$, por lo que $H^p(\mathbb{S}^1) = 0$ para $p > 1$. Veamos ahora qué pasa cuando $p = 0, 1$. No existen 0-formas exactas y una 0-forma cerrada sobre una variedad conexa es simplemente una función constante, por lo que deducimos

$$H^0(\mathbb{S}^1) \sim \mathbb{R}.$$

Consideremos ahora θ la función ángulo, que no está globalmente bien definida sobre $\mathbb{S}^1$, ya que sólo puede definirse salvo múltiplos enteros de 2π. Sin embargo, su diferencial $d\theta$ es una 1-forma globalmente bien definida y que no se anula en ningún punto de $\mathbb{S}^1$. De hecho, $d\theta$ es el elemento de volumen de la circunferencia (aunque sería más propio decir elemento de longitud) inducido por el elemento de volumen canónico de $\mathbb{R}^2$. Veamos que $d\theta$ no es exacta; si lo fuera entonces su integral sobre la circunferencia sería cero, pero su valor exacto es 2π.

Probemos que si α es una 1-forma (que siempre será cerrada), entonces existe una constante c tal que $\alpha - cd\theta$ es exacta. En efecto, si $\alpha = f(\theta)d\theta$, sea

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{S}^1}\alpha,$$

y consideremos

$$g(\theta) = \int_0^\theta (f(\theta) - c)d\theta.$$

Como $g(\theta + 2\pi n) = g(\theta)$ para todo entero n, entonces g es una función diferenciable bien definida en $\mathbb{S}^1$ y $dg = (f(\theta) - c)d\theta = \alpha - cd\theta$. Por tanto, cualquier 1-forma sobre $\mathbb{S}^1$ difiere de una forma exacta en un múltiplo entero de $d\theta$ y deducimos

$$H^1(\mathbb{S}^1)) \sim \mathbb{R}.$$

Teorema 4.46
Si M es una variedad simplemente conexa, entonces $H^0(M) \sim \mathbb{R}$ y $H^1(M) = \{0\}$.

La prueba de este teorema es consecuencia del siguiente resultado:

Teorema 4.47
Sea ω una 1-forma cerrada en una variedad simplemente conexa M. Entonces existe una función diferenciable f tal que $\omega = df$. Además, si g es otra función tal que $\omega = dg$ entonces $f - g$ es constante.

4.7.3. Aplicaciones entre los grupos de cohomología

Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable, entonces tenemos el homomorfismo pullback $f^* : \bigwedge(N) \to \bigwedge(M)$. Dado que $f^* \circ d = d \circ f^*$, deducimos que $f^*(C^k(N)) \subset C^k(M)$ y $f^*(E^k(N)) \subset E^k(M)$. Por tanto, f^* inducido un homomorfismo (que denotaremos de la misma manera f^*) entre $H^k(N)$ y $H^k(M)$.

Lema 4.48
(a) Una aplicación diferenciable $f : M \to N$ induce un homomorfismo de álgebras $f^* : H^k(N) \to H^k(M)$ para todo k. Si f es la aplicación identidad sobre M, entonces $f^* : H^*(M) \to H^*(M)$ es el isomorfismo identidad.
(b) Sean $f : M \to N$ y $g : N \to P$ aplicaciones diferenciables. Entonces $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Corolario 4.49
Si M y N son variedades difeomorfas, entonces $H^*(M)$ y $H^*(N)$ son álgebras isomorfas.

Sean M y N dos variedades diferenciables, no necesariamente de la misma dimensión, y consideremos dos aplicaciones $g : M \longrightarrow N$ y $h : N \longrightarrow M$. Si $g \circ h : N \longrightarrow N$ es diferenciablemente homotópica a la aplicación identidad de N, y $h \circ g : M \longrightarrow M$ es diferenciablemente homotópica a la aplicación identidad de M, entonces g^* y h^* son isomorfismos lineales de los grupos de cohomología. Por consiguiente, vemos de nuevo que si $f : M \longrightarrow N$ es un difeomorfismo, entonces $f^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$ es un isomorfismo. Así pues, la cohomología de De Rham es un invariante diferenciable de la variedad. El teorema de De Rham, que no probaremos en esta lección introductoria, afirma que, de hecho, es un invariante topológico, esto es, depende solamente de la estructura topológica subyacente a la variedad.

4.7.4. El lema de Poincaré

Un resultado de especial interés en este contexto es el lema de Poincaré, el cual afirma que si una variedad diferenciable M puede contraerse (diferenciablemente) a un punto de M, entonces toda forma cerrada es una forma exacta. Como caso particular, toda forma cerrada definida sobre un conjunto estrellado de $\mathbb{R}^n$ es exacta. En términos de los grupos de cohomología, el lema de Poincaré afirma que $H^k(M) = 0$, para $k > 0$, si M puede contraerse a un punto.

4.7.5. Cohomología de De Rham de los espacios euclídeos punteados y de las esferas

Un resultado útil, que es un caso especial del teorema de Mayer-Vietoris, puede enunciarse de la siguiente manera.

Teorema 4.50
Sean U y V dos subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ que son homológicamente triviales en todas las dimensiones. Sea $M = U \cup V$ y supongamos que $N = U \cap V$ es no vacío. Entonces $H^0(M)$ es trivial y $H^{k+1}(M)$ es isomorfo a $H^k(N)$ para todo $k \geq 0$.

Como aplicación del uso de estas herramientas puede probarse que la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$ y el espacio euclídeo punteado $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ tienen los mismos grupos de cohomología en todas las dimensiones. Además:

(a) dim $H^k(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$=0 para $0 < k < n-1$,

(b) dim $H^k(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$=1 para $k = n-1$.

En otras palabras, toda k-forma cerrada es exacta, para $0 < k < n-1$, y existe una $(n-1)$-forma η_0 cerrada y no exacta, tal que para cualquier otra $(n-1)$-forma cerrada η existe un número c para el cual $\eta - c\eta_0$ es exacta. Esto último significa que $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \backslash \{0\}) \approx \mathbb{R}$. Por otro lado, utilizando el teorema de Stokes podemos dar la siguiente caracterización de las formas exactas.

Proposición 4.51
Una $(n-1)$-forma cerrada η en $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ es exacta si, y sólo si, $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \eta = 0$.

FIN DEL CAPÍTULO 4