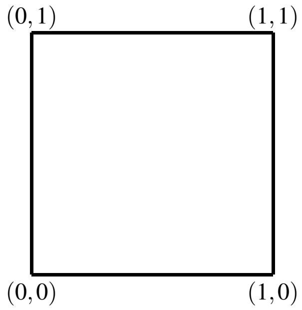
Variedades diferenciables y subvariedades

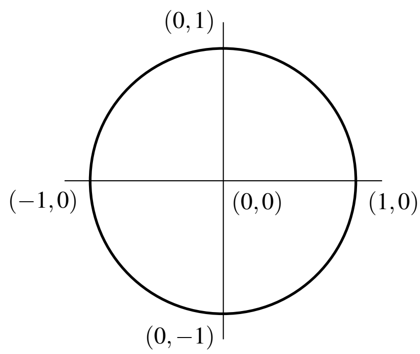
EJERCICIOS

1.1. Consideremos el cuadrado M en $\mathbb{R}^2$ descrito por la siguiente figura:



¿Admite M una estructura de variedad diferenciable?

1.2. Sea $\mathbb{S}^1$ la circunferencia de radio 1 y centrada en el origen de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.



Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{S}^1$:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \{(z_1,z_2) \in \mathbb{S}^1 \mid z_1 > 0\},\\
U_2 &= \{(z_1,z_2) \in \mathbb{S}^1 \mid z_2 > 0\},\\
U_3 &= \{(z_1,z_2) \in \mathbb{S}^1 \mid z_1 < 0\},\\
U_4 &= \{(z_1,z_2) \in \mathbb{S}^1 \mid z_2 < 0\},
\end{aligned}
$$

y definamos las siguientes funciones:

$$
\begin{aligned}
x_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x_1(z_1,z_2) = z_2,\\
x_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x_2(z_1,z_2) = z_1,\\
x_3 : U_3 &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x_3(z_1,z_2) = z_2,\\
x_4 : U_4 &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x_4(z_1,z_2) = z_1.
\end{aligned}
$$

(a) Prueba que $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ forma un atlas para $\mathbb{S}^1$.

(b) Prueba que el atlas definido en (a) es equivalente al formado por las dos cartas siguientes:

$$
\begin{array}{rcl}
y : \{(\operatorname{sen} 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid 0 < s < 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
(\operatorname{sen} 2\pi s, \cos 2\pi s) & \longrightarrow & s
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
y' : \{(\operatorname{sen} 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid -1/2 < s < 1/2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
(\operatorname{sen} 2\pi s, \cos 2\pi s) & \longrightarrow & s
\end{array}
$$

1.3. Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^n$:

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = r^2\}$, $r > 0$.

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2+y^2\}$.

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2-1 = 0\}$.

$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2-y^2-z^2-1 = 0\}$.

$E = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2 = a^2,\ z^2+w^2 = b^2\}$, $a,b > 0$.

Prueba que los conjuntos anteriores pueden dotarse de un atlas de forma que se convierten en variedades diferenciables. ¿Cuál es su dimensión?

1.4. Sea M una variedad diferenciable y $r > 0$ un número real positivo. Prueba que todo punto p de M admite un entorno coordenado (U,φ) tal que $\varphi(p) = (0,\ldots,0)$ y $\varphi(U) = B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$. Por tanto, todo punto admite una carta centrada en dicho punto y cuyo abierto coordenado es $\mathbb{R}^n$.

1.5. Sea M una variedad diferenciable n-dimensional y sea A un conjunto arbitrario. ¿Admite el producto cartesiano $M \times A$ estructura de variedad diferenciable?

1.6. **(a)** Sea M el conjunto de los pares de vectores ortonormales de $\mathbb{R}^2$. Prueba que M admite una estructura de variedad diferenciable.

(b) Generaliza el apartado anterior a $\mathbb{R}^n$.

1.7. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}$ una curva regular en $\mathbb{R}^3$ y sea M el conjunto de todos los vectores normales a α. ¿Admite M estructura de variedad diferenciable? En caso afirmativo, ¿de qué dimensión?

1.8. **(a)** Sea $S(n,\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices simétricas de orden n. Prueba que $S(n,\mathbb{R})$ admite estructura de variedad diferenciable.

(b) Sea $A(n,\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices antisimétricas de orden n. Prueba que $A(n,\mathbb{R})$ admite estructura de variedad diferenciable.

1.9. Un **grupo de Lie** G es una variedad diferenciable que al mismo tiempo admite un estructura de grupo tal que las operaciones del grupo son diferenciables; es decir, las aplicaciones

$$
\begin{array}{rcl}
\mu : G \times G & \longrightarrow & G\\
(a,b) & \longrightarrow & ab
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\xi : G & \longrightarrow & G\\
a & \longrightarrow & a^{-1}
\end{array}
$$

son ambas diferenciables.

Consideramos en $\mathbb{R}$ la aplicación $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mu(x,y) = (x^3+y^3)^{1/3}$. Estudia si $(\mathbb{R},\mu)$ es un grupo de Lie.

1.10. Sea M una variedad diferenciable y G un grupo. Se dice que G actúa sobre M si existe una aplicación $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ tal que:
i) las aplicaciones $\varphi_g = \varphi(g, \cdot)$ son difeomorfismos, y
ii) $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$, para todo $g, h \in G$.
La acción es *libre* si el elemento identidad es el único elemento de G que tiene algún punto fijo; y es *discontinua* si todo punto m tiene un entorno U tal que $\varphi_g(U) \cap U = \varnothing$ para todo $g \neq e$.
Si G actúa sobre M entonces determina una relación de equivalencia: dos puntos p y q están relacionados si existe $g \in G$ tal que $q = \varphi_g(p)$. Denotemos por M/G al conjunto cociente y por $\pi : M \longrightarrow M/G$ la proyección canónica.
Prueba que si $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ es una acción libre y discontinua de G sobre M, entonces M/G admite estructura de variedad diferenciable tal que π es un difeomorfismo local.

1.11. Prueba que $\mathbb{Z}$ actúa libre y discontinuamente como un grupo de transformaciones sobre $\mathbb{R}^2$ si la acción está determinada por la función global $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\Phi((x,y),n) = (x+n, (-1)^n y).$$

1.12. Prueba que la función global $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(m,n,s) = s + m\alpha + n\beta,$$

donde α y β son números cuya razón es irracional, determina una acción de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}$ que es libre pero no discontinua.

1.13. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ el grupo G de difeomorfismos generado por las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y) &= (x+1, -y), \\ \Phi_2(x,y) &= (x, y+1). \end{aligned}$$

Comprueba que el grupo G actúa libre y discontinuamente sobre $\mathbb{R}^2$. (La variedad cociente $\mathbb{R}^2/G$ se conoce como *la botella de Klein*).

1.14. **(a)** Definimos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \text{ si, y sólo si, } y = x + n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Prueba que el conjunto cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ admite estructura de variedad diferenciable de dimensión uno.

(b) En el plano $\mathbb{R}^2$ con coordenadas (x,y), definimos las aplicaciones (traslaciones) $T_{m,n} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante $T_{m,n}(x,y) = (x+m, y+n)$, donde m y n son enteros. Definimos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{R}^2$:

$$(x,y) \sim (a,b) \text{ si, y sólo si, } x = a+m,\ y = b+n.$$

Prueba que el conjunto cociente T admite estructura de variedad diferenciable 2-dimensional.

(c) En $\mathbb{R}^n$ definimos la siguiente relación de equivalencia. Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Entonces

$$x \sim y \text{ si, y sólo, si } y_i = x_i + m_i,\ m_i \in \mathbb{Z}.$$

Prueba que el conjunto cociente $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ admite estructura de variedad diferenciable n-dimensional.

1.15. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la siguiente relación de equivalencia:

$$(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \Leftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z} \mid x_1 - x_2 = n \text{ e } y_1 = (-1)^n y_2.$$

Sea $M = X/\sim$ el espacio cociente y $\pi : X \longrightarrow M$ la proyección canónica. Definamos

$$U_1 = \{\pi(x,y) \mid -1/2 < x < 1/2\}, \qquad U_2 = \{\pi(x,y) \mid 0 < x < 1\}.$$

Prueba que $\pi : (-1/2,1/2) \times \mathbb{R} \longrightarrow U_1$ y $\pi : (0,1) \times \mathbb{R} \longrightarrow U_2$ son homeomorfismos con inversos ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente, tales que $\mathscr{A} = \{(U_1,\phi_1),(U_2,\phi_2)\}$ es un atlas para M de dimensión dos (M dotado de esta estructura diferenciable se conoce como *la cinta de Möbius*).

1.16. Sea $F(k,n)$ el conjunto formado por todas las familias de k vectores de $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes (en general, cualquier espacio vectorial real n-dimensional). Dota a $F(k,n)$ de estructura de variedad diferenciable. Las variedades $F(k,n)$ se denominan *variedades de Stiefel*.

1.17. **(a)** Sea $G(k,n)$ el conjunto de todos los k-planos (subespacios lineales de dimensión k) pasando por el origen de $\mathbb{R}^n$ (en general, cualquier espacio vectorial real n-dimensional). Dota a $G(k,n)$ de estructura de variedad diferenciable. Las variedades $G(k,n)$ se denominan *variedades de Grassmann*. En particular, $G(1,n) = P^n(\mathbb{R})$.

(b) Prueba que para cualquier k, las variedades de Grassmann $G(k,n)$ y $G(n-k,n)$ son naturalmente difeomorfas.

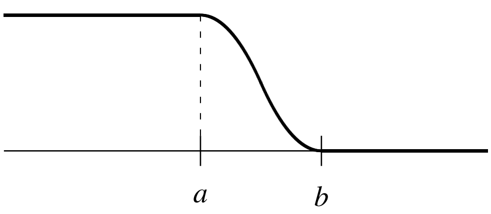
1.18. **(a)** Construye un difeomorfismo entre: (i) $]a,b[$ y $]-1,1[$; (ii) $]0,1[$ y $\mathbb{R}$.

(b) Prueba que no existe ningún difeomorfismo entre la circunferencia unidad y un intervalo de la recta real.

1.19. Demuestra que para todo par de números reales $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se puede construir una función diferenciable $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $0 \le h(t) \le 1$, tal que

(a) $h(t) \equiv 1$ si $t \le a$ y $h(t) \equiv 0$ si $t \ge b$.

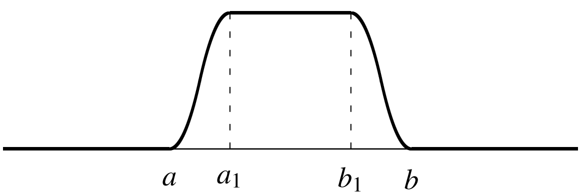
(b) $h(t) \equiv 0$ si $t \le a$ y $h(t) \equiv 1$ si $t \ge b$.



1.20. Demuestra que para toda cuaterna de números reales $a < a_1 < b_1 < b$, se puede construir una función diferenciable $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $0 \le h(t) \le 1$, tal que

(a) $h(t) \equiv 1$ si $t \le a$ o $t \ge b$ y $h(t) \equiv 0$ si $a_1 \le t \le b_1$.

(b) $h(t) \equiv 0$ si $t \le a$ o $t \ge b$ y $h(t) \equiv 1$ si $a_1 \le t \le b_1$.



1.21. Sea $X = \mathbb{R}$ con su estructura diferenciable estándar, y consideremos $Y = \mathbb{R}$ con la estructura diferenciable determinada por la carta $\phi(x) = x^3$. Consideremos las siguientes aplicaciones: $f : X \to Y$, $f(x) = x^{1/3}$; $g : X \to X$, $g(x) = x^{1/3}$; $h : X \to X$, $h(x) = x^3$; $\psi : X \to Y$, $\psi(x) = x$. ¿Cuáles de las aplicaciones f, g, h o ψ son diferenciables y/o difeomorfismos?

1.22. **(a)** Prueba que si $f : M \longrightarrow M'$ y $g : N \longrightarrow N'$ son aplicaciones diferenciables, entonces la aplicación producto $f \times g : M \times N \longrightarrow M' \times N'$ es también diferenciable.

(b) Si $f : M \longrightarrow N$ y $g : M \longrightarrow N'$ son aplicaciones diferenciables, entonces $(f,g) : M \longrightarrow N \times N'$ es una aplicación diferenciable. Como consecuencia la aplicación diagonal $d : M \longrightarrow M \times M$ definida por $d(m) = (m,m)$ es diferenciable.

(c) Sea $f : M \longrightarrow M'$ y $m \in M$. Prueba que f es diferenciable en m si y sólo si $\psi \circ f$ es diferenciable en m para toda función $\psi : M' \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $f(m)$.

1.23. **(a)** Si una aplicación $f : M \longrightarrow M'$ es diferenciable en un punto $p \in M$ entonces, usando las topologías inducidas en M y M', f es continua en p.

(b) Si $f : M \longrightarrow M'$ es una aplicación diferenciable y U es un subconjunto abierto de M que intersecta el dominio de f, entonces $f|_U$ es también diferenciable. Si f es un difeomorfismo, entonces $f|_U$ es también un difeomorfismo.

(c) La composición $g \circ f$ de dos aplicaciones diferenciables $f : M \longrightarrow M'$ y $g : M' \longrightarrow M''$ es también diferenciable. Si f y g son difeomorfismos entonces también lo es $g \circ f$.

(d) Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. Prueba que cualquier carta es un difeomorfismo. Recíprocamente, si $f : U \subset M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo entonces f es una carta de M.

1.24. Sean M_1 y M_2 dos variedades diferenciables y consideremos $M = M_1 \times M_2$ la variedad diferenciable producto. Sea $(p,q) \in M$. Definimos $j_p : M_2 \longrightarrow M$ e $i_q : M_1 \longrightarrow M$ por

$$j_p(y) = (p,y), \qquad i_q(x) = (x,q).$$

Prueba que j_p e i_q son aplicaciones diferenciables.

1.25. Prueba que la recta proyectiva real $P^1(\mathbb{R})$ es difeomorfa a $\mathbb{S}^1$. ¿Puede extenderse este resultado a dimensiones superiores?

1.26. **(a)** Prueba que $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y $\mathbb{S}^1$ son variedades diferenciables difeomorfas.

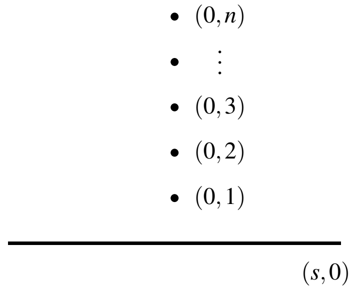
(b) Extiende el difeomorfismo anterior a las variedades $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$.

1.27. Sea K el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido como sigue:

$$K = \{(s,0) \mid s \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,n) \mid n = 0,1,2,\dots\}$$

Sea $U_n = \{(s,0) \mid s \neq 0\} \cup \{(0,n)\}$, $n = 0,1,2,\dots$. Definimos las funciones $x_n : U_n \to \mathbb{R}$ mediante

$$x_n(s,0) = s \neq 0, \qquad x_n(0,n) = 0.$$



Prueba:

(a) $\{(U_n, x_n)\}_{n=0}^{\infty}$ constituye un atlas sobre K.

(b) La topología inducida no es Hausdorff.

(c) La topología inducida no es localmente compacta.

1.28. Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido como sigue:

$$A = \{(s,0) \mid s \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}^+\}.$$

Sea $U_\alpha = \{(s,0) \mid s \neq 0\} \cup \{(0,\alpha)\}$. Definimos las funciones $x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ mediante

$$x_\alpha(s,0) = s \neq 0, \qquad x_\alpha(0,\alpha) = 0.$$

Prueba:

(a) $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in \mathbb{R}^+}$ constituye un atlas sobre A.

(b) La topología inducida no es Hausdorff ni localmente compacta.

(c) La topología inducida no satisface el segundo axioma de numerabilidad.

1.29. Una variedad M se dice *conexa* si, con la topología inducida, es un espacio topológico conexo. Prueba que una variedad Hausdorff M es conexa si, y sólo si, es conexa por arcos, es decir, para todo par de puntos p, q de M existe una aplicación $f : [0,1] \longrightarrow M$ continua tal que $f(0) = p$ y $f(1) = q$.

1.30. Prueba que las funciones $\{f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definidas por

$$f_n(x) = \frac{h(x-n)}{\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(x-m)},$$

donde

$$h(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-x^2}) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

constituyen una partición diferenciable de la unidad subordinada al cubrimiento abierto $\{(n-2, n+2)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbb{R}$.

1.31. **(a)** Construye en la esfera $\mathbb{S}^n$ una partición diferenciable de la unidad consistente en sólo dos funciones.

(b) Prueba que si M y M' son dos variedades paracompactas, entonces la variedad producto $M \times M'$ también es paracompacta.

1.32. Sean M y N dos variedades diferenciables de la misma dimensión. ¿Son localmente difeomorfas? ¿Son globalmente difeomorfas? ¿Qué ocurre en el caso concreto de $M = \mathbb{S}^n$ y $N = P^n(\mathbb{R})$?

1.33. Sea $E = \mathbb{R}^3$ y denotemos por $\mathbb{R}^2_a$ al plano $z = a$, con su topología usual. Consideremos E como la unión disjunta de $\mathbb{R}^2_a$, con $a \in \mathbb{R}$, y dotémosle de la topología natural: un subconjunto de E es abierto si, y sólo si, su intersección con cada $\mathbb{R}^2_a$ es abierto. Consideremos la siguiente relación:

$$(x,y)_a \sim (x',y')_b \Longleftrightarrow (x,y)_a = (x',y')_b \quad \text{o} \quad \begin{cases} y = y' > 0 \\ xy + a = x'y + b \end{cases}$$

donde $(x,y)_a$ denota el punto $(x,y,a) \in \mathbb{R}^2_a$.

(a) Comprueba que '$\sim$' es una relación de equivalencia. Sea $\mathscr{P} = E/\sim$, y consideremos $\pi : E \longrightarrow \mathscr{P}$ la aplicación canónica.

(b) Prueba que $\mathscr{P}$ es Hausdorff y que, para todo $a \in \mathbb{R}$, la restricción de π al plano $\mathbb{R}^2_a$ es un homeomorfismo en su imagen.

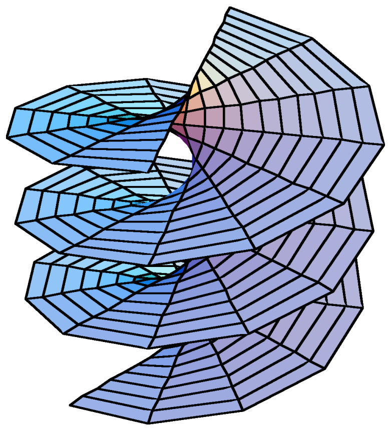
(c) Sea $f_a : \pi(\mathbb{R}^2_a) \to \mathbb{R}^2$ tal que $f_a([(x,y)_a]) = (x,y)$. Entonces $\{(\pi(\mathbb{R}^2_a), f_a)\}_{a\in\mathbb{R}}$ es un atlas sobre $\mathscr{P}$. $\mathscr{P}$ se denomina la **superficie de Prüfer**.

(d) Prueba que $\mathscr{P}$ no satisface el segundo axioma de numerabilidad.

1.34. Determina si la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$(x,y) \longrightarrow (y\cos x, y\operatorname{sen} x, x)$$

es una inmersión.

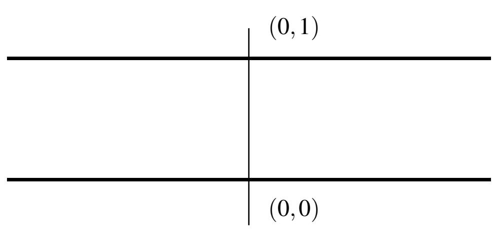


1.35. Sea $M = (\mathbb{R}\times\{0\}) \cup (\mathbb{R}\times\{1\})$ y se considera la estructura diferenciable dada por las cartas

$$x : \mathbb{R}\times\{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\ x(s,0) = s,$$
$$y : \mathbb{R}\times\{1\} \longrightarrow \mathbb{R},\ y(s,1) = s.$$

Sean las aplicaciones

$$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow M,\ \phi(s) = (s,1) \text{ si } s \neq 0,\ \text{y } \phi(0) = (0,0),$$
$$\psi : M \longrightarrow \mathbb{R},\ \psi(s,1) = \psi(s,0) = s,\ s \in \mathbb{R}.$$

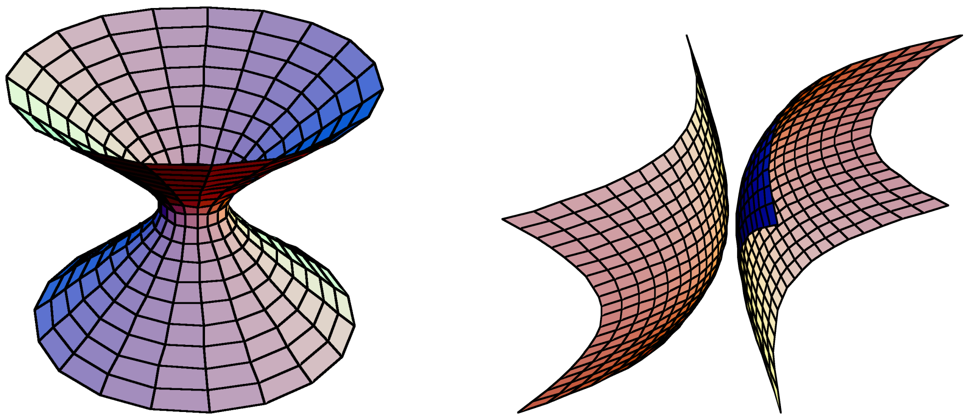


Prueba que ψ es una inmersión y que $\psi\circ\phi$ es diferenciable, aunque ϕ no es diferenciable.

1.36. Consideremos las funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

(a) $(x,y,z) \longrightarrow x^2 + y^2 - z^2 - 1$,

(b) $(x,y,z) \longrightarrow x^2 - y^2 - z^2 - 1$.



Prueba que la inyección canónica j de $f^{-1}(0)$ en $\mathbb{R}^3$ tiene rango 2 en todos los puntos calculando explícitamente la aplicación diferencial.

1.37. **(a)** Sean M y N dos variedades diferenciables de la misma dimensión y $f : M \longrightarrow N$ una inmersión. Si M es compacta y N es conexa y Hausdorff, prueba que f es sobreyectiva.

(b) Deduce que no existe ninguna inmersión de $\mathbb{S}^1$ en $\mathbb{R}$ ni de $P^n(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^n$.

1.38. Sea $F : (1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación dada por

$$F(t) = \left(\frac{t+1}{2t}\cos(2\pi t), \frac{t+1}{2t}\operatorname{sen}(2\pi t)\right).$$

¿Es F una inmersión?

1.39. Estudia si existe una inmersión inyectiva $f : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$. En caso negativo, ¿qué es lo que lo impide?

1.40. **(a)** Sea (U,x), con $x = (x_1,\dots,x_n)$, una carta en una variedad diferenciable M. Prueba que $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} representa la *delta de Kronecker*, para todo punto $p \in U$.

(b) Sea x es una carta de M y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable cuya representante local $F = f \circ x^{-1}$ está dada por $F(u_1,\dots,u_n) = \operatorname{sen} u_1 + \cos u_2$. Prueba que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cos x_1 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\operatorname{sen} x_2.$$

1.41. **(a)** Sea V un espacio vectorial n-dimensional real dotado con su estructura estándar de variedad diferenciable y $p \in V$ un punto de V. Prueba que T_pV es canónicamente isomorfo a V. De este modo, V y T_pV son, como variedades diferenciables, difeomorfas.

(b) Sea $\varphi : V \longrightarrow W$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensiones n y m, respectivamente. Prueba que φ es una aplicación diferenciable y calcula su diferencial en un punto $p \in V$ arbitrario.

1.42. **(a)** Si i es la aplicación identidad en algún entorno de $m \in M$, prueba que di_m es la aplicación identidad sobre el espacio tangente T_mM.

(b) Si $\varphi : M \longrightarrow M'$ es una aplicación constante en algún entorno de m, prueba que $d\varphi_m = 0$.

(c) Deduce que si ϕ y φ son dos aplicaciones de M en M' que coinciden en algún entorno de un punto $m \in M$, entonces $d\phi_m = d\varphi_m$.

(d) Sea M una variedad diferenciable conexa y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $df_p = 0$ en todo punto p de M. Prueba que f es una función constante.

1.43. Sea $\mathscr{C}^\infty(m)$ el álgebra de las funciones diferenciables en un entorno de m. Definimos el subconjunto $\mathscr{C}_s^\infty(m)$ de $\mathscr{C}^\infty(m)$ del siguiente modo. Una función $f \in \mathscr{C}^\infty(m)$ está en $\mathscr{C}_s^\infty(m)$ si, y sólo si, en algún entorno de m

$$f = c + \sum_{\text{finita}} f_\alpha g_\alpha,$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante y las funciones $f_\alpha, g_\alpha \in \mathscr{C}^\infty(m)$ verifican $f_\alpha(m) = g_\alpha(m) = 0$. Prueba que un operador lineal $D : \mathscr{C}^\infty(m) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una derivación si, y sólo si, $D \equiv 0$ sobre $\mathscr{C}_s^\infty(m)$.

1.44. Sean M_1 y M_2 dos variedades diferenciables y consideremos $M = M_1 \times M_2$ la variedad diferenciable producto. Prueba que para cualquier punto (p,q) de M, la aplicación $F : T_{(p,q)}M \longrightarrow T_pM_1 \times T_qM_2$ dada por

$$F(v) = ((d\pi_1)_p(v), (d\pi_2)_q(v))$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales cuyo inverso viene dado por

$$F^{-1}(v_1, v_2) = (di_q)_p(v_1) + (dj_p)_q(v_2).$$

En vista de esto, es usual identificar los vectores de $T_{(p,q)}M$ con sus imágenes por F. Así $v = (v_1, v_2)$ significará que $F(v) = (v_1, v_2)$.

1.45. Consideremos M_a el conjunto formado por todas las matrices reales de orden 2×2 con determinante a, siendo a un número real no nulo.

(a) Prueba que M_a admite una estructura de variedad diferenciable. ¿Cuál es su dimensión?

(b) Calcula el espacio tangente a M_a en el punto

$$p = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.46. Sean $f : M \longrightarrow M'$ y $g : M' \longrightarrow M''$ dos aplicaciones diferenciables y p un punto que está en el dominio de $g \circ f$. Prueba:

(a) Si el rango de g en $f(p)$ es igual a la dimensión de M', entonces $g \circ f$ y f tienen el mismo rango en p.

(b) Si el rango de f en p es igual a la dimensión de M', entonces el rango de $g \circ f$ en p coincide con el rango de g en $f(p)$.

1.47. **(a)** Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable con rango constante e igual a $\dim M = \dim N$. Prueba que $f(M)$ es un abierto en N.

(b) Sea $f : M \longrightarrow N$ una aplicación diferenciable y biyectiva. Supongamos que f tiene rango constante e igual a $\dim M = \dim N$. Prueba que f es un difeomorfismo.

(c) Demuestra que la proyección natural $\pi : \mathbb{S}^n \longrightarrow P^n(\mathbb{R})$ tiene rango constante e igual a n. Deduce que π es un difeomorfismo local pero no un difeomorfismo global.

1.48. **(a)** Sea $j : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la inyección canónica de la esfera $\mathbb{S}^2$ en el espacio euclídeo tridimensional. Calcula explícitamente la diferencial de la aplicación j y determina su rango.

(b) Idénticas cuestiones para la inyección canónica $j : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

1.49. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función diferenciable definida en coordenadas esféricas por $f(r, \theta, \phi) = r \tan\theta$. Encuentra las constantes a, b, c tales que la diferencial de f se expresa en el punto $p = (r, \theta, \phi) = (1, \pi/4, 0)$ como $df_p = a\,dx + b\,dy + c\,dz$.

1.50. Sea M una variedad diferenciable compacta de dimensión n y consideremos $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. ¿Existe algún punto $p \in M$ tal que df_p es singular?

1.51. (Fórmula de Leibnitz) Sean M_1 y M_2 dos variedades diferenciables y consideremos $M = M_1 \times M_2$ la variedad diferenciable producto. Sea $\Phi : M \longrightarrow P$ una aplicación diferenciable. Prueba que

$$(d\Phi)_{(p,q)}(v) = (d\Phi_q)_p(v_1) + (d\Phi_p)_q(v_2),$$

donde $\Phi_p = \Phi \circ j_p$, $\Phi_q = \Phi \circ i_q$ y $v = (v_1, v_2)$. Como consecuencia, si $f : M \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable sobre M, entonces

$$v(f) = v_1(f_q) + v_2(f_p).$$

1.52. Consideremos la aplicación $\sigma : \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{S}^n$ definida por $\sigma(z) = \dfrac{z}{|z|}$.

(a) Prueba que σ es una aplicación diferenciable.

(b) Calcula su diferencial, así como su rango y su núcleo.

1.53. Sea $\mathscr{M} = \mathscr{M}(n, \mathbb{R})$ el conjunto de todas las matrices reales de orden $n \times n$, con su estructura canónica de variedad diferenciable. Entonces $\det : \mathscr{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación diferenciable y $GL(n) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$ es un subconjunto abierto de $\mathscr{M}$; por tanto, $GL(n)$ es una subvariedad diferenciable de dimensión n^2. Probar:

a) $\det : GL(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene rango constante e igual a 1. En consecuencia, $\det^{-1}(1) = SL(n)$ es una hipersuperficie de $GL(n)$, que llamaremos el *grupo especial lineal*.

b) El espacio tangente $T_I(SL(n)) \subset \mathscr{M}$, donde I denota la matriz identidad de orden n, está formado por las matrices de traza cero.

1.54. Sea la aplicación diferenciable $\phi : GL(n) \longrightarrow GL(n)$ definida por $\phi(A) = A^t A$, donde A^t indica la matriz transpuesta. Prueba:

a) Relativa a la identificación estándar $T_I(GL(n)) = \mathscr{M}(n)$, la aplicación diferencial

$$d\phi_I : T_I(GL(n)) \longrightarrow T_I(GL(n))$$

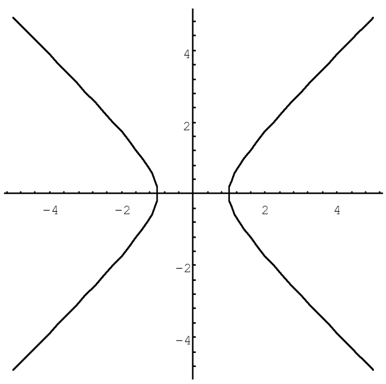
está dada por $d\phi_I(B) = B^t + B$.

b) La aplicación ϕ tiene rango $n(n+1)/2$ en I.

c) Deduce que el grupo ortogonal $O(n) \subset GL(n)$ es una subvariedad compacta cuya dimensión es $n(n-1)/2$.

d) Prueba que el subespacio $T_I(O(n)) \subset \mathscr{M}(n)$ está formado por las matrices antisimétricas.

1.55. **(a)** Sea $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ la hipérbola equilátera.



Justifica que S es una subvariedad 1-dimensional cerrada de $\mathbb{R}^2$ y dótale de un atlas de una sola carta.

(b) Deduce que el conjunto $F = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 - y^2 = 1, z^2 - w^2 = 1\}$ es una subvariedad 2-dimensional de $\mathbb{R}^4$, que denominaremos *toro*.

1.56. **(a)** Prueba que el conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + y^3 + z^3 - 2xyz = 1\}$$

es una subvariedad cerrada de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2.

(b) Prueba que el conjunto

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 + 2xz + 2yz = 1,\ 2x - y + z = 0\}$$

puede dotarse de estructura de variedad diferenciable de forma que sea una subvariedad 1-dimensional cerrada de $\mathbb{R}^3$.

1.57. Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

- $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = |x|\}$,
- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 + y^3 - 3xy = 1\}$,
- $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$.

¿Cuáles de ellos son subvariedades de $\mathbb{R}^2$?

1.58. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son subvariedades de $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{aligned} A &= \{(t,t^2) \mid t \in \mathbb{R}^-\} \cup \{(t,-t^2) \mid t \in \mathbb{R}^+\} \\ B &= \{(x,y) \mid x = 0 \text{ o } y = 0\} \\ C &= \{(\cos(t), \cos(t/3) + \operatorname{sen}(t/3)) \mid t \in (0, 4\pi + \frac{3\pi}{4})\} \end{aligned}$$

1.59. Sea $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$. Construyamos dos cartas aplicando cada eje en la recta real mediante $(x,0) \to x$, $(0,y) \to y$. ¿Definen las cartas anteriores un atlas sobre el conjunto abstracto S? Si no es así, ¿admite S estructura de variedad diferenciable? En caso afirmativo, ¿es S una subvariedad de $\mathbb{R}^2$?

1.60. Sea el toro de revolución $T^2 \subset \mathbb{R}^3$, simétrico respecto del origen $0 \in \mathbb{R}^3$. Sea $G = \{A, I\} \subset \mathrm{Isom}(T^2)$, donde A es la aplicación antípodal e I es la identidad. Entonces:

a) El cociente $K = T^2/G$ admite estructura de variedad diferenciable. K se denomina la *Botella de Klein*.

b) La aplicación $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ dada por

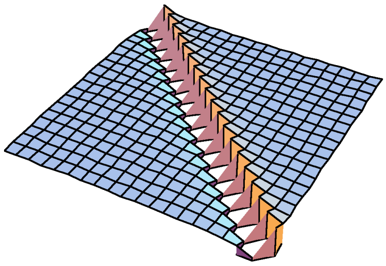
$$\phi(x,y) = ((r\cos y + a)\cos x, (r\cos y + a)\sin x, r\sin y\cos(x/2), r\sin y\sin(x/2))$$

induce un embebimiento de la botella de Klein en $\mathbb{R}^4$.

1.61. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función diferenciable definida por $f(x,y) = y^4 - y^2 + \frac{1}{4}x^2$ y consideremos el conjunto $M = f^{-1}(0)$. ¿Admite M estructura de variedad diferenciable?

1.62. Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene rango 1 en todos los puntos de una fibra $F = f^{-1}(a)$. Si p es un punto de F y $v \in T_pM$, prueba que $v \in T_pF$ si, y sólo si, $df_p(v) = 0$.

1.63. Prueba que para cualesquiera números reales a, b y c (no todos nulos), la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x,y,z) = ayz + bxz + cxy - 1$, determina sobre $f^{-1}(0)$ la estructura de una variedad diferenciable cerrada no compacta.



1.64. Consideremos la aplicación diferenciable $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $F(x,y,z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$ y sea $\pi : \mathbb{S}^2 \to P^2(\mathbb{R})$ la proyección canónica de la esfera unidad en el plano proyectivo. Sean $\varphi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^4$ y $\tilde{\varphi} : P^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ las aplicaciones que hacen el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}^3 \arrow[dr, "F"] & \\ \mathbb{S}^2 \arrow[ur, "j"] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R}^4 \\ & P^2(\mathbb{R}) \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $j : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ es la inclusión canónica; en otras palabras, $\varphi = F|_{\mathbb{S}^2}$ y $\tilde{\varphi}([(x,y,z)]) = \varphi(x,y,z)$. Prueba que $\tilde{\varphi}$ es un embebimiento.

1.65. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2), \qquad a > b$$

a) Determina los valores $c \in \mathbb{R}$ para los que $f^{-1}(c)$ es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$.

b) Sea $S = f^{-1}(0)$ y consideremos el punto $p = (a,0,b) \in S$. Calcula una base del plano tangente $T_pS \subset \mathbb{R}^3$.

1.66. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^6$ la aplicación definida por

$$f(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz, \sqrt{2}xy).$$

Prueba que f induce un embebimiento de la esfera $\mathbb{S}^2(1)$ en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^6$. La subvariedad $f(\mathbb{S}^2)$ se denomina *superficie de Veronese*.

1.67. Sea $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función polinómica homogénea de grado $r \geq 1$ con al menos un valor positivo. Prueba:

a) La función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = F(x) - 1$, determina en $f^{-1}(0)$ una estructura de variedad diferenciable. (Ind.: Utiliza el teorema de Euler para funciones homogéneas).

b) Si $F(z) > 0$ excepto para $z = 0$, entonces $f^{-1}(0)$ es una subvariedad compacta de $\mathbb{R}^n$. (Ind.: Prueba que está acotada).

1.68. Sea $f : \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(x,y,z) = (yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)$$

y consideremos $\widetilde{f} : P^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$\widetilde{f}([p]) = f(p),$$

donde estamos identificando $P^2(\mathbb{R})$ con $\mathbb{S}^2/\{1, A\}$. Prueba que $\widetilde{f}$ es un embebimiento de $P^2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^4$.

1.69. **(a)** Una aplicación diferenciable $f : M \longrightarrow N$ es una sumersión si tiene rango constante e igual a $\dim N$. Sea $M = \prod_{i=1}^n M_i$. Prueba que las proyecciones $p_k : M \longrightarrow M_k$ son sumersiones.

(b) Sean $\varphi_i : M_i \longrightarrow N_i$, $i = 1, \ldots, n$, sumersiones. Prueba que la aplicación producto $\varphi = \varphi_1 \times \ldots \varphi_n : \prod_{i=1}^n M_i \longrightarrow \prod_{i=1}^n N_i$ es una sumersión.

1.70. Sea $f : M \to M'$ una sumersión y sea p un punto del dominio de f. Prueba que existen cartas (U, x) de p y (W, y) de $f(p)$ tal que la representante local $y \circ f \circ x^{-1}$ de f está dada por $y \circ f \circ x^{-1}(z, w) = z$.