Campos de vectores y campos de tensores

EJERCICIOS

2.1. Se consideran los siguientes tres campos de vectores sobre $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} X &= \partial_x, \\ Y &= \partial_x + \partial_y, \\ Z &= \partial_x + \partial_y + (1+x^2)\partial_z, \end{aligned}$$

siendo (x,y,z) el sistema rectangular usual de coordenadas de $\mathbb{R}^3$. Justifica que forman una base global de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$.

2.2. **(a)** ¿Qué condición geométrica verifican los campos tangentes a la esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$? Utiliza dicha caracterización para construir una base del tangente a $\mathbb{S}^2$ en un punto genérico $(x,y,z) \in \mathbb{S}^2$.

(b) Prueba que el campo de vectores X sobre $\mathbb{R}^{2n}$ definido por

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + x^{2n} \frac{\partial}{\partial x^{2n-1}} - x^{2n-1} \frac{\partial}{\partial x^{2n}}$$

es un campo de vectores diferenciable no nulo cuando lo restringimos a la esfera $\mathbb{S}^{2n-1}$.

2.3. Consideremos en $\mathbb{S}^2$ el atlas obtenido mediante las proyecciones estereográficas $x = (x^1, x^2)$, $y = (y^1, y^2)$. Prueba que los campos

$$X = x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \qquad \text{e} \qquad Y = -y^1 \frac{\partial}{\partial y^1} - y^2 \frac{\partial}{\partial y^2}$$

coinciden en la intersección de sus dominios y, por tanto, juntos definen un campo de vectores sobre $\mathbb{S}^2$.

2.4. Sean $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ las cartas de las proyecciones estereográficas sobre $\mathbb{S}^2$ desde los polos N y S. Si a, $b \in \mathbb{R}$, se consideran los campos

$$\begin{aligned} &(ax_1 - bx_2)\frac{\partial}{\partial x_1} + (bx_1 + ax_2)\frac{\partial}{\partial x_2} \\ &(-ay_1 - by_2)\frac{\partial}{\partial y_1} + (by_1 - ay_2)\frac{\partial}{\partial y_2} \end{aligned}$$

¿Definen juntos un campo de vectores global sobre $\mathbb{S}^2$?

2.5. Sean $\phi_1 : U_1 = \mathbb{S}^n \backslash \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $\phi_2 : U_2 = \mathbb{S}^n \backslash \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ las cartas estereográficas para $\mathbb{S}^n$. Sean X_1 y X_2 dos campos de vectores sobre $\mathbb{R}^n$. ¿Qué condición deben satisfacer X_1 y X_2 para representar en las cartas ϕ_1 y ϕ_2, respectivamente, el mismo campo de vectores X sobre $\mathbb{S}^n$?

2.6. **(a)** En el toro $T \subset \mathbb{R}^3$ se considera el campo vectorial W definido como sigue. Se parametrizan los meridianos de T por la longitud de arco y para cada punto p de T, $W(p)$ es el vector velocidad del meridiano que pasa por p. Prueba que W es un campo de vectores diferenciable.

(b) Siguiendo el mismo procedimiento que en el apartado anterior, esta vez sobre la esfera $\mathbb{S}^2$ y utilizando los semimeridianos, construye un campo vectorial W definido en la esfera menos los dos polos N y S.

(c) Reparametriza todos los semimeridianos de la esfera $\mathbb{S}^2$ mediante el mismo parámetro t, $-1 < t < 1$, y define $V(p) = (1-t^2)W(p)$, para $p \neq N$ y $p \neq S$. En los polos, hacemos $V(N) = V(S) = 0$. Prueba que V es un campo de vectores diferenciable en $\mathbb{S}^2$.

2.7. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2$ la parametrización del toro definida por $\phi(\theta,\theta') = (e^{i\theta}, e^{i\theta'})$ y sea Y un campo de vectores sobre $\mathbb{R}^2$. ¿Bajo qué condiciones Y representa, con respecto a la parametrización ϕ, un campo de vectores X sobre T^2?

2.8. Los campos de vectores X_i $(i = 1,\dots,r)$ definidos en un subconjunto U de una variedad diferenciable M de dimensión n son *linealmente independientes* si los vectores $X_i(p)$ son linealmente independientes en cada punto p de U. Entonces, un conjunto ordenado de n campos de vectores linealmente independientes $X_1,\dots,X_n$ sobre U se llama una *paralelización de U*. Si M admite una paralelización global, entonces diremos que M es *paralelizable*. Prueba:

(a) Toda variedad con una carta global es paralelizable. En consecuencia, los espacios euclídeos son paralelizables.

(b) Las esferas $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^3$ son paralelizables. La esfera $\mathbb{S}^2$ no es paralelizable.

(c) Si M y M' son variedades paralelizables, entonces $M \times M'$ también lo es. Prueba, con un ejemplo, que el recíproco no siempre es cierto.

2.9. Sean (x,y) las coordenadas naturales de $\mathbb{R}^2$ y consideremos los campos de vectores

$$V = \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}, \qquad W = (x^2+y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Calcula el corchete de Lie $[V,W]$.

2.10. Sea X un campo de vectores sobre $\mathbb{S}^n$ y lo extendemos a $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ por $\tilde{X}(x) = \|x\| X\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$. Sean los campos de vectores sobre $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ definidos por $Y(x) = \frac{x}{\|x\|}$ y $X_1(x) = \tilde{X}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$. Calcula los corchetes de Lie $[\tilde{X}, Y], [X_1, Y]$.

2.11. Sea la aplicación diferenciable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $f(t) = (\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t))$ y consideremos el campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ definido por $X(t) = t\partial_t$. ¿Existe un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^1)$ tal que X está f-relacionado con Y?

2.12. Sea $j : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la inclusión canónica y consideremos $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n-1})$ un campo de vectores diferenciable sobre la esfera $\mathbb{S}^{n-1}$. ¿Existe un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ tal que $Y \sim_j X$, es decir, Y está j-relacionado con X?

2.13. Sea t la carta identidad sobre $\mathbb{R}$ y consideremos el campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ dado por $X(t) = e^t \partial_t$. ¿Es X un campo de vectores completo?

2.14. **(a)** Prueba que el campo de vectores sobre $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ definido por

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$$

no es completo.

(b) Prueba que los campos de vectores definidos sobre $\mathbb{R}^2$ en términos de la carta identidad por

$$X = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \text{e} \qquad Y = \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

son completos y, sin embargo, su corchete de Lie $[X,Y]$ no es completo.

2.15. Encuentra las curvas integrales de los campos de vectores sobre $\mathbb{R}^2$ definidos en términos de la carta identidad por:

$$\textbf{(a)}\ \frac{1}{e^{x_1}} \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad\qquad \textbf{(b)}\ x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - (x_2)^3 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

En cada caso encuentra los puntos críticos y determina si el campo de vectores es completo.

2.16. Sean los campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definidos por $X = y^2 \partial_x$, $Y = x^2 \partial_y$, donde (x,y) representa la carta identidad. ¿Cuáles de los campos X, Y, $X+Y$ son completos?

2.17. Se considera la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (t,x,y) & \longrightarrow & (t+x,y). \end{array}$$

Encuentra un campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ tal que Φ sea su flujo.

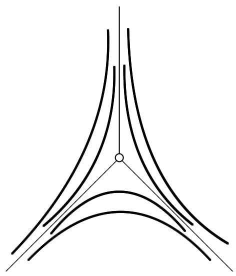
2.18. Sea $M = \mathbb{R}^2$ y consideremos $\phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ definida por

$$\phi(t,x_1,x_2) = (x_1 \cos t - x_2 \operatorname{sen} t,\ x_1 \operatorname{sen} t + x_2 \cos t).$$

(a) Prueba que ϕ es un grupo uniparamétrico de difeomorfismos.

(b) Halla un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que ϕ sea el flujo de X.

2.19. En $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, ¿existe algún campo de vectores cuyas curvas integrales sean las de la siguiente figura?



2.20. Se considera el campo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ definido en la carta identidad (x_1,x_2,x_3) por:

$$X = (-x_1 + x_2 - 2x_3) \frac{\partial}{\partial x_1} + (-x_2 + 4x_3) \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Encuentra el flujo de X.

2.21. Sean X, Y, Z los campos de vectores definidos en $\mathbb{R}^3$ por

$$X = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z},$$

$$Y = x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x},$$

$$Z = y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

(a) Prueba que la aplicación $(a,b,c) \longrightarrow aX+bY+cZ$ es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en un subespacio de $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$.

(b) Obtén el flujo del campo $X+Y+Z$.

2.22. Sean $x=(x_1,x_2)$ e $y=(y_1,y_2)$ las proyecciones estereográficas de $\mathbb{S}^2$. Consideremos el campo de vectores X en $\mathbb{S}^2$ definido por los campos de vectores:

$$(x_1-x_2)\frac{\partial}{\partial x_1}+(x_1+x_2)\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$(-y_1-y_2)\frac{\partial}{\partial y_1}+(y_1-y_2)\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

(a) Prueba que X es, efectivamente, un campo de vectores diferenciable sobre $\mathbb{S}^2$ y halla sus puntos críticos.

(b) Encuentra sus curvas integrales y determina si es un campo completo.

2.23. Sea $M=GL(2,\mathbb{R})$ el grupo lineal de orden 2 y definamos la aplicación

$$\begin{array}{rcl}\Phi:\mathbb{R}\times M & \longrightarrow & M\\ (t,A) & \longrightarrow & \begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A\end{array}$$

donde el punto $\cdot$ indica la multiplicación de matrices. Encuentra un campo $X\in\mathfrak{X}(M)$ tal que Φ sea su flujo.

2.24. Encuentra ejemplos de campos de vectores con las siguientes condiciones:

I) sobre $\mathbb{S}^1$ con exactamente k puntos críticos; generalizar a $\mathbb{T}^n$.

II) sobre $\mathbb{R}^2$ con exactamente un punto crítico y todas las demás órbitas cerradas.

III) sobre $\mathbb{R}^2$ con exactamente un punto crítico y todas las demás órbitas no cerradas.

IV) sobre $\mathbb{S}^2$ con exactamente dos puntos críticos.

2.25. Sean X e Y dos campos de vectores diferenciables sobre variedades diferenciables M y N, respectivamente, y sea $F:M\to N$ una aplicación diferenciable. Sean θ y σ los flujos generados por X e Y, respectivamente. ¿Qué deben satisfacer θ y σ para que los campos X e Y estén F-relacionados?

2.26. Prueba que el flujo del campo de vectores X definido en $\mathbb{R}^n$ por

$$\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

es $\Phi(t,x)=e^t x$. Deduce de esto el *teorema de Euler* para funciones homogéneas.

Nota. Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y consideremos una función $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Se dice que f es *homogénea de grado p* si $f(\lambda x)=\lambda^p f(x)$, para cada λ real y cada $x\in\Omega$ para el que $\lambda x\in\Omega$. El teorema de Euler para funciones homogéneas afirma que si f es una función diferenciable homogénea de grado p, entonces

$$\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=pf(x).$$

También es posible demostrar el recíproco.

2.27. **(a)** Prueba que existe un $\mathscr{C}^\infty(M)$-isomorfismo entre $\mathfrak{X}^*(M)$ y $\mathscr{T}_1^0(M)$, donde $\mathfrak{X}^*(M)$ denota el módulo dual de $\mathfrak{X}(M)$.

(b) Prueba que existe un $\mathscr{C}^\infty(M)$-isomorfismo entre $\mathfrak{X}(M)$ y $\mathscr{T}_0^1(M)$.

(c) Deduce que $\mathfrak{X}(M)$ se identifica de modo natural con su módulo bidual.

2.28. Sean A y B dos campos tensoriales de tipo (1,1) sobre una variedad diferenciable M. Pongamos

$$\begin{aligned} S(X,Y) &= [AX,BY]+[BX,AY]+AB[X,Y]+BA[X,Y] \\ &\quad -A[X,BY]-A[BX,Y]-B[X,AY]-B[AX,Y], \end{aligned}$$

con $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$. Entonces la aplicación $S:\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$ define un tensor de tipo (1,2) sobre M tal que $S(X,Y)=-S(Y,X)$.

2.29. Sea A un campo tensorial de tipo (1,2). Sean $\xi=(x_1,\dots,x_n)$ y $\eta=(y_1,\dots,y_n)$ sistemas coordenados sobre $U\subset M$. Prueba que las componentes de A relativas a η están determinadas como sigue por las componentes de A relativas a ξ:

$$^{\eta}A^c_{ab}=\sum_{i,j,k}\frac{\partial y_c}{\partial x_k}\frac{\partial x_i}{\partial y_a}\frac{\partial x_j}{\partial y_b}\;{}^{\xi}A^k_{ij}.$$

2.30. Sea x la carta identidad de $\mathbb{R}^n$ y consideremos $g:\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)\times\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)\longrightarrow\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$\begin{aligned} g(X,Y):\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longrightarrow g(X,Y)(p)=\textstyle\sum_{i=1}^n a_i(p)b_i(p), \end{aligned}$$

donde $X=\displaystyle\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y=\displaystyle\sum_i b_i\frac{\partial}{\partial x_i}$.

(a) Verifica que g es un tensor de tipo (0,2).

(b) Obtén las componentes de g relativas a x.

(c) Sea $y=(y_1,\dots,y_n)$ la aplicación definida por:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_1+x_2, \\ &\;\vdots \\ y_n &= x_1+\cdots+x_n. \end{aligned}$$

Prueba que y es una carta en $\mathbb{R}^n$ y calcula las componentes de g relativas a y.

2.31. Sea M una variedad diferenciable.

(a) Interpreta $A\in\mathscr{T}_1^1(M)$ como una aplicación diferenciable que asigna a cada punto $p\in M$ un operador lineal A_p sobre T_pM.

(b) Prueba que $(CA)(p)=\mathrm{traza}(A_p)$, C es el operador *Contracción*.

(c) Si $A,B\in\mathscr{T}_1^1(M)$, expresa la aplicación $p\longrightarrow A_p\circ B_p$ como un elemento de $\mathscr{T}_1^1(M)$.

2.32. **1)** Sea $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la aplicación diferenciable definida por $\varphi(x,y)=(x+2y,y)$ y sea $T=3x\partial_x\otimes dy+\partial_y\otimes dy\in\mathscr{T}_1^1(\mathbb{R}^2)$. Calcula el pullback $\varphi^*(T)$ y el pushforward $\varphi_*(T)$ del tensor T.

2) Sean los tensores $A=T\otimes\varphi^*(T)$ y $B=\varphi_*(T)\otimes T$. Calcula $C_2^1A-C_1^2B$.

2.33. En $\mathbb{R}^2$, con las coordenadas usuales (x_1,x_2), consideramos el tensor $T\in\mathscr{T}_1^2(\mathbb{R}^2)$ dado por $T=xy\partial_x\otimes\partial_x\otimes dy-y^2\partial_x\otimes\partial_y\otimes dy+3x^2y\partial_y\otimes\partial_x\otimes dx$. ¿Cuánto vale la contracción $C_1^2(T)$?

2.34. Sea $F:M\longrightarrow N$ una aplicación diferenciable.

(a) Si $i : M \longrightarrow M$ es la identidad, entonces i^* es la identidad sobre $\mathscr{T}_s^0(M)$.

(b) Para tensores covariantes A y B de tipo $(0,s)$ y $(0,t)$, respectivamente, se verifica:

$$F^*(A \otimes B) = F^*(A) \otimes F^*(B).$$

(c) Si $G : N \longrightarrow P$ es también una aplicación diferenciable:

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* : \mathscr{T}_s^0(M) \longrightarrow \mathscr{T}_s^0(M),$$

para todo $s \geq 0$.

2.35. Sea $F : M \longrightarrow N$ un difeomorfismo.

(a) Entonces cada campo tensorial $\Phi \in \mathscr{T}_s^r(M)$ determina un campo tensorial $F_*\Phi \in \mathscr{T}_s^r(N)$, llamado el *pushforward* de Φ mediante F, por la fórmula

$$(F_*\Phi)(\omega^1, \ldots, \omega^r, X_1, \ldots, X_s)(p) =$$
$$\Phi_{F^{-1}(p)}(F_p^*(\omega_p^1), \ldots, F_p^*(\omega_p^r), dF_p^{-1}(X_{1p}), \ldots, dF_p^{-1}(X_{sp})),$$

donde F_p^* denota la aplicación transpuesta de dF_p, es decir, $F_p^* : T_pN^* \longrightarrow T_{F^{-1}(p)}M^*$, $F_p^*(\omega)(v) = \omega(dF_{F^{-1}(p)}(v))$, $v \in T_{F^{-1}(p)}M$, $\omega \in T_pN^*$.

(b) Si $i : M \longrightarrow M$ es la identidad, entonces i_* es la identidad de $\mathscr{T}_s^r(M)$.

(c) Si $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$ y $B \in \mathscr{T}_{s'}^{r'}(M)$, entonces

$$F_*(A \otimes B) = F_*(A) \otimes F_*(B) \ .$$

(d) Si $G : N \longrightarrow P$ es también un difeomorfismo, entonces

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_* \ .$$

2.36. Sea $\phi : M^m \longrightarrow N^n$ una aplicación diferenciable que aplica el sistema coordenado $\xi = (x_1, \ldots, x_m)$ en un sistema coordenado $\eta = (y_1, \ldots, y_n)$ en N. Si B es un campo tensorial covariante, de tipo (0,2), prueba que sobre el entorno coordenado de ξ se satisface:

$$(\phi^* B)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{a,b=1}^{n} \frac{\partial(y_a \circ \phi)}{\partial x_i} \frac{\partial(y_b \circ \phi)}{\partial x_j} B\left(\frac{\partial}{\partial y_a}, \frac{\partial}{\partial y_b}\right) \circ \phi$$

2.37. Sobre $\mathbb{R}^2$ con las coordenadas usuales (x_1, x_2), sea $\phi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ la aplicación lineal con matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Sea $T \in \mathscr{T}_2^0(\mathbb{R}^2)$ dado por $T = dx^1 \otimes dx^1 + 2dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1 + 3dx^2 \otimes dx^2$. Obten ϕ^*T.

(b) Sea $T \in \mathscr{T}_1^1(\mathbb{R}^2)$ definido por $T = e_1 \otimes e^2 - 2e_2 \otimes e^2$. Calcula las componentes de ϕ_*T.

2.38. Sea $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $\phi(x,y,z) = (2x+z, xyz)$ y $T \in \mathscr{T}_2^0(\mathbb{R}^2)$ definido por $T = (u+2v)du \otimes du + u^2 du \otimes dv$. Calcula ϕ^*T.

2.39. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x,y) = (x+2y, y)$ y sea el tensor $T \in \mathscr{T}_2^0(\mathbb{R}^2)$ dado por $T = 3x dx \otimes dy + dy \otimes dy$. ¿Cuánto valen $C_2^1(\varphi_*T \otimes \varphi^*T)$ y $C_1^2(\varphi_*T \otimes \varphi^*T)$?

2.40. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ definida por $\phi(x,y) = (x^3 + y, y)$ y sea el tensor T de tipo $(2,1)$ dado por

$$T = x\frac{\partial}{\partial x} \otimes dx \otimes dy + y\frac{\partial}{\partial y} \otimes dy \otimes dy.$$

Prueba que ϕ es un difeomorfismo y calcula:

(a) El pushforward $\phi_* T$.

(b) Las contracciones (1,1) y (1,2) de T.

2.41. Sea $T \in \mathscr{T}_1^{\,1}(\mathbb{R}^2)$ definido por

$$T = xy\frac{\partial}{\partial x} \otimes dx + y\frac{\partial}{\partial y} \otimes dx + \frac{\partial}{\partial x} \otimes dy.$$

Definimos la aplicación ϕ como sigue: $\phi : \{(x,y) \mid y > 0\} \longrightarrow \{(x,y) \mid x > 0,\ x^2 < y\}$ mediante $\phi(x,y) = (y\mathrm{e}^x, y^2\mathrm{e}^{2x} + y)$. Prueba que ϕ es un difeomorfismo y calcula:

(a) La traza de T.

(b) El *push-forward* de T, $\phi_* T$.

2.42. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\varphi = \pi \circ \phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright", shift left=4ex] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

donde las aplicaciones ϕ y π están definidas como sigue:

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z) &= (x, 3y + 11z, 2x + y + 4z), \\ \pi(u,v,w) &= (u,v). \end{aligned}$$

Sean los tensores $T \in \mathscr{T}_1^{\,1}(\mathbb{R}^3)$ y $A \in \mathscr{T}_1^{\,0}(\mathbb{R}^2)$ definidos por

$$\begin{aligned} T &= x\frac{\partial}{\partial y} \otimes \mathrm{d}z + y\frac{\partial}{\partial z} \otimes \mathrm{d}x, \\ A &= u\,\mathrm{d}u + v\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Calcula los siguientes tensores:

1) El pushforward de T, $\phi_*(T)$.

2) El pullback de A, $\pi^*(A)$.

3) $\omega = C_2^1(\phi_*(T) \otimes \pi^*(A))$.

4) $\phi^*\omega - C_2^1(T \otimes \varphi^* A)$

2.43. **(a)** Sea $T \in \mathscr{T}_2^{\,0}(\mathbb{R}^2)$ un tensor no nulo. Encuentra una caracterización para que T se pueda escribir en la forma $T = A \otimes B$, con $A, B \in \mathscr{T}_1^{\,0}(\mathbb{R}^2)$.

(b) Sea $A \in \mathscr{T}_2^0(M)$ un tensor simétrico y $B \in \mathscr{T}_0^2(M)$ un tensor antisimétrico. Calcula $\sum_{i,j} a_{ij} b^{ij}$.

(c) Sean $A, B \in \mathscr{T}_2^0(M)$ dos tensores simétricos de componentes respectivas a_{ij}, b_{kl}, verificando la igualdad:

$$a_{ij} b_{kl} - a_{il} b_{kj} + a_{jk} b_{il} - a_{kl} b_{ij} = 0.$$

Prueba que $a_{ij} = \lambda b_{ij}$.