Derivaciones tensoriales y formas diferenciales

EJERCICIOS

3.1. Calcula el producto exterior de las siguientes formas diferenciales, en cada caso:

1. $\omega = x_2dx_1 + x_1dx_2$ y $\eta = x_1dx_1 - x_2dx_2$.
2. $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + 3x_3dx_2 \wedge dx_3$ y $\eta = x_1x_2x_3dx_1 \wedge dx_2$.
3. $\omega = x_1x_3dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 - (3x_1 - x_2)dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_7$ y $\eta = x_2x_4x_7dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_6$.

3.2. Sean las formas $\omega = x_3x_4dx_1 + x_1x_2x_3dx_3 + x_4dx_4$ y $\eta = 2x_1x_4dx_1 \wedge dx_3 + 5x_2x_3x_4dx_2 \wedge dx_4$. Calcula:

1. $d\omega$.
2. $d\eta$.
3. $d\omega \wedge \eta$.
4. $\omega \wedge d\eta$.
5. $d(\omega \wedge \eta)$.

3.3. Se define la aplicación $T_{0,n} : \bigwedge^0(U) \to \bigwedge^n(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$, mediante

$$T_{0,n}(f) = f\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Demuestra que es una transformación lineal biyectiva (esto es, un isomorfismo de módulos).

3.4. De manera análoga, podemos construir una aplicación $T_{1,n-1} : \bigwedge^1(U) \to \bigwedge^{n-1}(U)$ que asocia a cada 1-forma $\omega = f_1dx_1 + \cdots + f_ndx_n$ la $(n-1)$-forma

$$T_{1,n-1}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_i\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Prueba que $T_{1,n-1}$ es un isomorfismo de módulos.

3.5. Generaliza los dos ejercicios anteriores construyendo un isomorfismo de módulos $T_{k,n-k}$ entre los módulos $\bigwedge^k(U)$ y $\bigwedge^{n-k}(U)$.

3.6. Calcula $\varphi^*\omega$ en los siguientes casos:

1. $\omega = 2x_1x_2dx_1 + x_1dx_2$, $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(y_1, y_2, y_3) = (2y_2y_3, 3y_1y_2)$.
2. $\omega = x_1x_2dx_1 \wedge dx_2 + x_3dx_2 \wedge dx_3$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(y_1, y_2) = (y_2, y_2, y_1y_2)$.
3. $\omega = x_1x_2x_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1^2, y_2y_3, y_3y_4)$.