Integración en variedades

EJERCICIOS

4.1. Prueba que un conjunto de medida cero no puede contener un conjunto abierto.

4.2. Prueba que las uniones finitas y las intersecciones de dominios de integración es un dominio de integración.

4.3. Si D es un dominio de integración, entonces $\overset{\circ}{D}$ y $\overline{D}$ también son dominios de integración. Prueba que:

$$\int_D f\,dv = \int_{\overset{\circ}{D}} f\,dv = \int_{\overline{D}} f\,dv.$$

4.4. Sea γ una curva diferenciable a trozos entre dos puntos p y q de una variedad diferenciable M y consideremos f una función diferenciable. Demuestra la igualdad

$$\int_\gamma df = f(q) - f(p).$$

Demuéstralo sin utilizar el teorema de Stokes y suponiendo, en primer lugar, que la imagen de la curva está dentro de un entorno coordenado.

4.5. Evalúa la integral de línea de $\omega = x^2 y dx + x dy$ en $\mathbb{R}^2$ a lo largo del segmento que conecta $(0,0)$ con $(1,1)$. Realiza el mismo cálculo a lo largo de la línea quebrada que conecta $(0,0)$ con $(1,1)$ pasando por $(1,0)$. ¿Se obtiene el mismo valor? ¿Puedes generalizar lo que está ocurriendo?

4.6. Demuestra que todas las integrales de línea de $\omega = P dx + Q dy + R dz$ en $\mathbb{R}^3$ son independientes del camino solamente si el valor de la integral sobre cualquier camino cerrado es cero. Utiliza este hecho y el teorema de Stokes para encontrar condiciones sobre las funciones P, Q, R que sean suficientes para probar la independencia del camino.

4.7. Sea $\gamma \subset M$ una curva en M parametrizada por una aplicación $F(t)$, $t \in [a,b]$. Supongamos que $t = f(s)$, $s \in [c,d]$, es un cambio de parámetro sobre γ. Si ω es una 1-forma en M, entonces el valor de la integral $\int_\gamma \omega$ no cambia de valor si $f'(s) > 0$, es decir, si la orientación de $G = F \circ f$ es la misma. Cuando $f'(s) < 0$ entonces la integral cambia de signo.

4.8. Demuestra directamente el teorema de Stokes para un triángulo en $\mathbb{R}^2$ y un cubo en $\mathbb{R}^3$.

4.9. Sea la superficie parametrizada S que es la imagen de la función diferenciable

$$f : \{(u,v) \mid u^2 + v^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

definida por $f(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$, y consideremos la función diferenciable $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $\rho(x,y,z) = ax + by + z$, donde a y b son constantes. Calcula la integral

$$\int_S \rho\, dA.$$

4.10. Sea la función diferenciable $f : [0,2\pi]\times[0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(u,v) = (\cos u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos v).$$

Sea $S = f([0,2\pi]\times[0,\pi])$ y consideremos la función

$$\rho(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}},$$

donde a es una constante, $0 < a < 1$. Calcula la integral

$$\int_S \rho \, dA.$$

4.11. Sea D un dominio de integración y f una función integrable en D. Se define el *valor medio* de f en D como

$$\mu(f,D) = \frac{1}{\operatorname{vol}(D)} \int_D f \, dv.$$

Calcula el valor medio de la función ρ en los dos ejercicios anteriores.

4.12. Calcula las siguientes integrales de superficie $\int_S f \, dA$:

1. $f(x,y,z) = x$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0, z \geq 0\}$.
2. $f(x,y,z) = y$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0, z \geq 0\}$.
3. $f(x,y,z) = z$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1, x \geq 0, z \geq 0\}$.
4. $f(x,y,z) = xy+xz$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

4.13. Calcula el valor medio de la función $f(x,y,z) = x$ sobre la porción del plano $z = x$ cuya proyección en el plano xy es el cuadrado $[-1,1]\times[-1,1]$. Interpreta el resultado.

4.14. Repite el ejercicio anterior con la función $f(x,y,z) = y$, y el plano $z = y$.

4.15. ¿Cuál es el valor promedio del producto de tres números no negativos cuando cada uno de estos varía de tal manera que su suma siempre es igual a la unidad?

4.16. ¿Cuál es el valor promedio de la suma de tres números no negativos cuando cada uno de estos varía de tal manera que la suma de sus cuadrados siempre es igual a la unidad?

4.17. ¿Cuál es el valor promedio de la suma de los cuadrados de tres números no negativos cuando cada uno de estos varía de tal manera que su suma siempre es igual a la unidad?

4.18. Si S es una superficie con campo normal unitario N, entonces el flujo de un campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a través de S se define como

$$\iint_S F \cdot N \, dA.$$

En los siguientes casos, calcula el flujo del campo F a través de la superficie S:

1. $F(x,y,z) = (0,1,0)$, $S = f(U)$, donde $U = [a,b]\times[c,d]$ y $f(u,v) = (u,v,\alpha u+\beta v+\gamma)$.
2. $F(x,y,z) = (x,y,z-1)$, $S = \{(u,v,u^2+v^2 \mid u^2+v^2 \leq 1\}$.
3. $F(x,y,z) = (x,y,z)$, S es la esfera de radio r.
4. $F(x,y,z) = (x,y,z)$, S es el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1.$$