Geometría y Topología

Primer control
11 de diciembre de 2009

CUESTIÓN 1. (2 puntos) Prueba que la función $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(m,n,s) = s + m\alpha + n\beta,$$

donde α y β son números cuya razón α/β es irracional, determina una acción de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{R}$ que es libre.

CUESTIÓN 2. (2 puntos) Sea A el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido como sigue:

$$A = \{(s,0) \mid s \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,\alpha) \mid \alpha \geq 0\}.$$

Sea $U_\alpha = \{(s,0) \mid s \neq 0\} \cup \{(0,\alpha)\}$ y definamos las funciones $x_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ mediante

$$x_\alpha(s,0) = s \neq 0, \qquad x_\alpha(0,\alpha) = 0.$$

Entonces $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \geq 0}$ constituye un atlas sobre A (no hay que probarlo). Demuestra que la topología inducida en A por esta estructura diferenciable no es Hausdorff.

CUESTIÓN 3. (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función diferenciable, definida en coordenadas esféricas (r,θ,ϕ), por $f(r,\theta,\phi) = r^2 \tan\theta$. Encuentra las constantes a,b,c tales que la diferencial de f se expresa en el punto $p = (r,\theta,\phi) = (1,\pi/4,0)$ como $df_p = a\,dx + b\,dy + c\,dz$. (*Nota.* Utiliza la siguiente relación: $x = r\cos\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\cos\phi$, $z = r\sin\phi$.)

CUESTIÓN 4. (4 puntos) Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2).$$

Prueba que $f^{-1}(4)$ es una superficie regular de $\mathbb{R}^3$ y calcula el plano tangente $T_pS \subset \mathbb{R}^3$ en el punto $p = (2,0,1)$.