Geometría y Topología

10 de junio de 2009

TEORÍA

Cuestión 1 (1 punto). Demuestra SOLO UNO de los resultados siguientes:

Teorema 2.5: Sea M^n una variedad diferenciable de dimensión n y $p \in M^n$. Entonces el espacio tangente T_pM es un espacio vectorial (real) de dimensión n.

Proposición 3.1: Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Si se escogen las bases canónicas asociadas a dos sistemas de coordenadas, uno para el punto p y otro para el punto imagen $f(p)$, la matriz de la aplicación diferencial df_p no es más que la matriz jacobiana de la representante local de f.

Cuestión 2 (1 punto). Demuestra SOLO UNO de los resultados siguientes:

Proposición 5.1: Un campo de vectores X es diferenciable si, y sólo si, $X(f)$ es una función diferenciable para toda función diferenciable $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Proposición 6.4: Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ y $\alpha_p : I_p \to M$ la curva integral maximal de X que empieza en p. Si $q = \alpha_p(s)$ entonces $I_q = I_p - s$ y $\alpha_q(t) = \alpha_p(s+t)$ para $t \in I_q$.

Cuestión 3 (1 punto). Demuestra SOLO UNO de los resultados siguientes:

Teorema 10.4: Sea un campo de vectores diferenciable V y una función $\delta : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ $\mathbb{R}$-lineal, satisfaciendo $\delta(fX) = V(f)X + f\delta(X)$. Entonces existe una única derivación que coincide con V actuando sobre las funciones diferenciables y con δ actuando sobre los campos de vectores.

Proposición 10.6: La derivada de Lie satisface las siguientes propiedades:
(1) $\mathscr{L}_{aV+bW} = a\mathscr{L}_V + b\mathscr{L}_W$, $a,b \in \mathbb{R}$.
(2) $[\mathscr{L}_V, \mathscr{L}_W] = \mathscr{L}_{[V,W]}$.
(3) $\mathscr{L}_V(df) = d(Vf)$.

PROBLEMAS

Problema 1 (3 puntos). Consideremos la función $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z,w) = x^4 + y^4 + z^4 + w^4 - 3xyzw$.

a) Prueba que $M_c = f^{-1}(c)$, $c \neq 0$, es una variedad diferenciable de dimensión 3.

b) ¿Es compacta? Justifica la respuesta.

c) Consideremos la hipersuperficie $M_1 = f^{-1}(1)$ y sea el punto $p = (1,0,0,0) \in M_1$. Encuentra una base del espacio tangente $T_pM \subset \mathbb{R}^4$.

Problema 2 (2 puntos). Sean $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ las proyecciones estereográficas de la esfera $\mathbb{S}^2$ desde el polo norte N y desde el polo sur S, respectivamente. Consideremos los campos locales definidos en estos sistemas de coordenadas como sigue:

$$\begin{aligned} X &= (x_1 - x_2)\partial_{x_1} + (x_1 + x_2)\partial_{x_2}, \\ Y &= (ay_1 + by_2)\partial_{y_1} + (cy_1 + dy_2)\partial_{y_2}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

a) ¿Cuánto deben valer las constantes a,b,c,d para que determinen un campo de vectores global (definido en toda la esfera)?

b) ¿Cuál es la curva integral de dicho campo que pasa por el punto $p = (1,0,0)$?

Problema 3 (2 puntos).

a) Sea la aplicación $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x,y,z) = (x+z, y-z)$ y consideremos el tensor $T = v\,\partial_u \otimes du + u\,\partial_v \otimes dv \in \mathcal{T}^1_1(\mathbb{R}^2)$. Calcula $C^1_1(\phi^*T)$.

b) Sea el tensor $T = 3\,du \otimes dv - 4\,dv \otimes du \in \mathcal{T}^0_2(\mathbb{R}^2)$. Calcula la 2-forma $\omega = \mathcal{A}(T)$, donde $\mathcal{A}$ es el operador antisimetrización.