Geometría y Topología

15 de julio de 2009

TEORÍA

Cuestión 1 (1 punto). Demuestra SOLO UNO de los resultados siguientes:

Proposición 2.2: Sea M una variedad diferenciable n-dimensional y $p \in M$. El conjunto de todas las derivaciones sobre $\mathscr{C}^\infty(p)$ admite estructura de espacio vectorial.

Proposición 3.4: Sea $f : M \to N$ una aplicación diferenciable y sea p un punto de su dominio. La aplicación diferencial df_p es un isomorfismo lineal si, y sólo si, existe un entorno U de p tal que $f|_U : U \to f(U)$ es un difeomorfismo.

Cuestión 2 (1 punto). Demuestra SOLO UNO de los resultados siguientes:

Proposición 4.8: Sea $f : M^m \to N^n$ $(m > n)$ una aplicación diferenciable y $q \in N$ un valor regular de f. Entonces $P = f^{-1}(q)$ es una subvariedad cerrada $(m-n)$-dimensional de M.

Proposición 5.4: Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vectores diferenciables sobre M y $f, g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ funciones diferenciables. Entonces se cumple:
(1) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (identidad de Jacobi).
(2) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

Cuestión 3 (1 punto). Demuestra SOLO UNO de los resultados siguientes:

Teorema 8.4: Sea $A \in \mathscr{T}_s^r(M)$. Sean uno formas θ^i, ω^i, $i = 1, \ldots, r$, y campos de vectores X_j, Y_j, $j = 1, \ldots, s$, tales que $\theta^i(p) = \omega^i(p)$ y $X_j(p) = Y_j(p)$ para un punto $p \in M$. Entonces

$$A(\theta^1, \ldots, \theta^r, X_1, \ldots, X_s)(p) = A(\omega^1, \ldots, \omega^r, Y_1, \ldots, Y_s)(p).$$

Proposición 10.13: Sean X e Y campos de vectores diferenciables. Entonces se satisface lo siguiente:
(1) $\mathscr{L}_X = i_X d + d i_X$.
(2) $\mathscr{L}_X i_Y - i_Y \mathscr{L}_X = i_{[X,Y]}$.

PROBLEMAS

Problema 1 (3 puntos). Sea K el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido por $K = \{(s,0) \mid s \in \mathbb{R}\} \cup \{(0,n) \mid n \geq 0\}$. Consideremos $U_n = \{(s,0) \mid s \neq 0\} \cup \{(0,n)\}$ y definamos las funciones $x_n : U_n \to \mathbb{R}$ mediante

$$x_n(s,0) = s \neq 0 \quad \text{y} \quad x_n(0,n) = 0.$$

Prueba lo siguiente:

- **a)** $\{(U_n, x_n)\}_{n \geq 0}$ constituye un atlas sobre K.
- **b)** La topología inducida no es Hausdorff.
- **c)** La topología inducida no es localmente compacta.

Problema 2 (2 puntos). Sea X el campo de vectores en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$X = (x^2 - 1)\frac{\partial}{\partial x} + xy\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial}{\partial z}.$$

- **a)** ¿Es X un campo de vectores completo?
- **b)** Prueba que el campo X es tangente a la esfera unidad $\mathbb{S}^2$ en todo punto de dicha superficie y determina sus puntos críticos.

Problema 3 (2 puntos). Sea la aplicación $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x,y) = (x, 2x - y)$. Consideremos el tensor $T = (x+y)\partial_x \otimes dy$ y el campo de vectores $X = \partial_x + \partial_y$. Calcula:

- **a)** $\phi^* T$.
- **b)** $\mathscr{L}_X T$.