Geometría y Topología

7 de septiembre de 2009

TEORÍA

Cuestión 1 (1 punto). Demuestra la **Proposición 3.1**:
Sea $f: M \to N$ una aplicación diferenciable. Si se escogen las bases canónicas asociadas a dos sistemas de coordenadas, uno para el punto p y otro para el punto imagen $f(p)$, la matriz de la aplicación diferencial df_p no es más que la matriz jacobiana de la representante local de f (en el punto correspondiente).

Cuestión 2 (1 punto). Demuestra la **Proposición 5.4**:
Sean $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ campos de vectores diferenciables sobre M y $f,g \in \mathscr{C}^\infty(M)$ funciones diferenciables. Entonces se cumple:
(1) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ (identidad de Jacobi).
(2) $[fX,gY] = fg[X,Y]+fX(g)Y-gY(f)X$.

Cuestión 3 (1 punto). Demuestra la **Proposición 10.13**:
Sean X e Y campos de vectores diferenciables. Entonces se satisface lo siguiente:
(1) $\mathscr{L}_X = i_X d + d i_X$.
(2) $\mathscr{L}_X i_Y - i_Y \mathscr{L}_X = i_{[X,Y]}$.

PROBLEMAS

Problema 1 (2,5 puntos). Sea el conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$. En dicho conjunto definimos la siguiente relación: dados $p,q \in C$, entonces $p \sim q$ si, y sólo si, $q = \lambda p$, para $\lambda = \frac{1}{2}, 1, 2$.

a) Justifica brevemente que $\sim$ es una relación de equivalencia y prueba que el conjunto cociente $T = C/\sim$ admite una estructura de variedad diferenciable de dimensión 2.
b) Construye un difeomorfismo entre T y una conocida superficie de $\mathbb{R}^3$.

Problema 2 (2 puntos).

a) Dados los siguientes campos de vectores en $\mathbb{R}^3$ (con coordenadas $\{x,y,z\}$):

$$X = y\partial_x - x\partial_y, \quad Y = z\partial_y - y\partial_z, \quad Z = \partial_x + \partial_y + \partial_z,$$

calcula $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]$.
b) Considera las siguientes 1-formas en $\mathbb{R}^2$ (con coordenadas $\{x,y\}$):

$$\sigma = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y, \qquad \eta = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y.$$

Determina el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ donde son linealmente independientes y encuentra la referencia de campos dual en dicho subconjunto.

Problema 3 (2,5 puntos). Sea $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices cuadradas $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ con la estructura diferenciable estándar.

a) Prueba que $\Phi(X,Y) = \mathrm{tr}(X^t \cdot Y)$, donde X e Y son matrices cuadradas cuyas entradas son funciones diferenciables, es un tensor covariante. ¿Cuáles son las componentes de Φ en el sistema de coordenadas canónico de $\mathscr{M}(n,\mathbb{R})$?
b) Consideremos la aplicación $F: \mathscr{M}(n,\mathbb{R}) \to \mathscr{M}(n,\mathbb{R})$ dada por $F(A) = A + A^t$. Justifica que F es diferenciable y calcula el tensor $F^*\Phi$.